Exemplo de uma tranformação definida e com valores em espaços de dimensão distinta que é invertível:

Retomemos o estudo da transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$T(p_0 + p_1\, t + p_2\, t^2) = \begin{bmatrix} p_0 + 2\,p_1 + 3\,p_2 & -p_0 + 2\,p_1 + 2\,p_2 \\ -2\,p_0 + 5\,p_2 & -3\,p_0 + 2\,p_1 + 3\,p_2 \end{bmatrix}$$

Vimos que T é representada em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}^{2\times 2}$ pela matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \overset{\text{el. Gauss}}{\longrightarrow} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo T representada pela matriz U em relação às bases: canónica de $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, em que

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Relativamente à matriz U sabemos que $N_U = \{0\}$ e que $\dim C_U = 3$, sendo

$$C_U = L(\{(1,0,0,0),(2,4,0,0),(3,5,6,0)\}) = L(\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}) \subset \mathbb{R}^4.$$

Usando os isomorfismos entre $N(U)$ e $N(T)$ e entre C_U e $I(T)$, concluímos que

$$N(T) = \{0\} \quad \text{e} \quad \dim I(T) = 3$$

com

$$I(T) = L(\{M_1, 2M_1 + 4M_2, 3M_1 + 5M_2 + 6M_3\}) = L(\{M_1, M_2, M_3\}).$$

Sendo $N(T) = \{0\}$, T é invertível. Determinemos a inversa de T. Como já sabemos que $\dim I(T) = 3$, podemos considerar $T : \mathcal{P}_2 \to I(T)$, sendo a transformação assim considerada injectiva e sobrejectiva. A representação matricial de T em relação às bases canónica de $\mathcal{P}_2$ e $\{M_1, M_2, M_3\}$ de $I(T)$ é dada pela matriz $\widetilde{U}$, que se obtém de U eliminando a linha nula. A inversa de T, $T^{-1} : I(T) \to \mathcal{P}_2$, é representada em relação àquele par de bases pela inversa de $\widetilde{U}$:

$$\widetilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{U}^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tal significa que

$$T^{-1}(M_1) = 1\,, \quad T^{-1}(M_2) = \frac{1}{4}(t-2)\,, \quad T^{-1}(M_3) = \frac{1}{24}(4t^2 - 5t - 2)\,,$$

o que caracteriza completamente a transformação em causa.