- <u>Qualquer transformação linear definida e com valores em espaços lineares de dimensão finita pode ser representada por uma matriz.</u>

Vejamos como:

$$
\begin{array}{rcl}
T:\ V & \longrightarrow & W \\
\dim V = n & & \dim W = m \\
\text{base de } V : \mathcal{B}_V = (v_1, \ldots, v_n) & & \text{base de } W : \mathcal{B}_W = (w_1, \ldots, w_m) \\
v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j v_j & & w = Tv = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i w_i
\end{array}
$$

vector coluna das componentes de v na base $\mathcal{B}_V$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ vector coluna das componentes de $w = Tv$ na base $\mathcal{B}_W$

Tem-se

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i w_i = w = Tv &= T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j T v_j \qquad\qquad Tv_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \quad j = 1, \ldots, n \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) w_i
\end{aligned}
$$

Tratando-se de duas representações do mesmo vector, $w = Tv$, na base $\mathcal{B}_W$ os coeficientes escalares coincidem. Consequentemente,

$$
y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, m
$$

ou, na notação matricial,

$$
\boxed{y = A\ x}
$$

em que $A = [a_{ij}] \quad (m \times n)$ é designada por

<u>matriz que representa T em relação às bases $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.</u>

Esta matriz pode ser caracterizada do seguinte modo:

- Na coluna $j = 1, \ldots, n$ figuram as componentes da imagem por T do vector $v_j \in \mathcal{B}_V$, Tv_j, na base $\mathcal{B}_W$:

$$
Tv_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \quad \text{na base } \mathcal{B}_W
$$

- **Como se modifica a matriz que representa uma transformação linear quando se mudam as bases dos espaços lineares?**

$$
\begin{array}{rcl}
T : V & \longrightarrow & W \\
\dim V = n & & \dim W = m \\
\text{base inicial de } V : \mathcal{B}_V = (v_1, \ldots, v_n) & & \text{base inicial de } W : \mathcal{B}_W = (w_1, \ldots, w_m) \\
\text{nova base de } V : \widetilde{\mathcal{B}}_V = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) & & \text{nova base de } W : \widetilde{\mathcal{B}}_W = (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_m)
\end{array}
$$

Sejam:

- A - matriz que representa T em relação às bases (iniciais) $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$,

  sendo x o vector coluna das componentes de $v \in V$ na base $\mathcal{B}_V$ e y o vector coluna das componentes de $w = Tv \in V$ na base $\mathcal{B}_W$, então

$$y = A\,x.$$

- $\widetilde{A}$ - matriz que representa T em relação às (novas) bases $\widetilde{\mathcal{B}}_V$ e $\widetilde{\mathcal{B}}_W$,

  sendo $\tilde{x}$ o vector coluna das componentes de v na base $\widetilde{\mathcal{B}}_V$ e $\tilde{y}$ o vector coluna das componentes de $w = Tv$ na base $\widetilde{\mathcal{B}}_W$, então

$$\tilde{y} = \widetilde{A}\,\tilde{x}.$$

- matriz de mudança de base em V:

  S_V - matriz de mudança da base $\mathcal{B}_V$ para a base $\widetilde{\mathcal{B}}_V$.

  Tal significa que

$$\tilde{x} = S_V^{-1}\,x\ .$$

- matriz de mudança de base em W:

  S_W - matriz de mudança da base $\mathcal{B}_W$ para a base $\widetilde{\mathcal{B}}_W$.

  Tal significa que

$$\tilde{y} = S_W^{-1}\,y\ .$$

Destas relações obtém-se:

$$\tilde{y} = S_W^{-1}\,y = S_W^{-1}\,A\,x = S_W^{-1}\,A\;S_V\,\tilde{x},$$

pois, $\tilde{x} = S_V^{-1}\,x$ é equivalente a $S_V\,\tilde{x} = x$.
Em virtude da unicidade da matriz que representa uma transformação linear fixadas as bases dos espaços, conclui-se que

$$\boxed{\widetilde{A} = S_W^{-1}\,A\;S_V}\,.$$

Exemplo da determinação da matriz que representa uma transformação linear e simplificação da representação

Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ a transformação linear definida por

$$T(p_0 + p_1\,t + p_2\,t^2) = \begin{bmatrix} p_0 + 2\,p_1 + 3\,p_2 & -p_0 + 2\,p_1 + 2\,p_2 \\ -2\,p_0 + 5\,p_2 & -3\,p_0 + 2\,p_1 + 3\,p_2 \end{bmatrix}$$

Pretende-se:

1. Obter a matriz que representa T em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}^{2\times 2}$,
2. Determinar uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que, mantendo a base canónica em $\mathcal{P}_2$, a representação matricial de T seja uma matriz em escada de linhas.

1. Calculamos as imagens do polinómios da base canónica de $\mathcal{P}_2$ e representamo-los na base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, dispondo ordenadamente os as componentes nas colunas de uma matriz, digamos$A$ - esta é matriz que representa T em relação às bases canónicas:

$$\begin{aligned} T(1) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = E_{11} - E_{12} - 2\,E_{21} - 3\,E_{22} \\ T(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\,E_{11} + 2E_{12} + 2\,E_{22} \\ T(t^2) &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 3\,E_{11} + 2\,E_{12} + 5\,E_{21} + 3\,E_{21} \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Já vimos como muda a matriz que representa T quando mudamos as bases de $\mathcal{P}_2$ e $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Neste caso, como não se altera a base de $\mathcal{P}_2$, a nova representação $\widetilde{A}$ de T é dada por $\widetilde{A} = S^{-1}A$, em que S é a matriz de mudança da base canónica para a base a determinar de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Por outro lado, podemos facilmente obter a partir de A uma matriz em escada de linhas, digamos U, bastando para tal aplicar a A o método de eliminacão de Gauss. Neste caso, tem-se: $A = LU$ com

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pretende-se, pois, tomar $\widetilde{A} = U$, pelo que deverá ser $U = S^{-1}A \quad \Leftrightarrow \quad SU = A$ e, portanto, $S = L$. A matriz de mudança de base S tem nas suas colunas as componentes dos vectores da nova base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ representados na base canónica, pelo que a base pretendida de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$