Exemplo de determinação de bases para: o espaço das linhas, o espaço das colunas e núcleo de uma matriz

Notação: $X \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$\mathfrak{C}_X$ - conjunto das colunas de X; $C_X = L(\mathfrak{C}_X)$ - espaço das colunas de X,

$\mathfrak{L}_X$ - conjunto das linhas de X; $L_X = L(\mathfrak{L}_X)$ - espaço das linhas de X,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Troca das linhas 2 e 4}]{\textbf{el.Gauss}} U = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• <u>São linearmente independentes as colunas de U que contêm "pivôs"</u>:

$\mathfrak{C}_U^p$ - conjunto das colunas de U com pivô

$\mathfrak{C}_U^p = \{(1,0,0,0),(3,1,0,0),(5,3,4,0)\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^4$

$\mathfrak{C}_U = \mathfrak{C}_U^p \cup \{(2,0,0,0),(4,2,0,0)\}$ é linearmente dependente em $\mathbb{R}^4$

• <u>São linearmente independentes as linhas de U que contêm"pivôs"</u>

(ou seja, as linhas não nulas):

$\mathfrak{L}_U^p$ - conjunto das linhas de U com pivô

$\mathfrak{L}_U^p = \{(1,2,3,4,5),(0,0,1,2,3),(0,0,0,0,4)\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^5$

$\mathfrak{L}_U = \mathfrak{L}_U^p \cup \{(0,0,0,0,0)\}$ é linearmente dependente em $\mathbb{R}^5$

• número de linhas linearmente independentes de U em $\mathbb{R}^5$ =

= número de colunas linearmente independentes de U em $\mathbb{R}^4$=

= número de "pivôs" de U = característica de U .

$$\dim L_U = \dim \mathcal{C}_U = \operatorname{car} U = 3$$

• <u>O espaço das linhas é invariante pelo método de eliminação de Gauss</u>.

As linhas linearmente independentes de A são as que dão origem às linhas não nulas de U (<u>Atenção à troca de linhas durante a eliminação de Gauss</u>)

$\mathfrak{L}_A^p = \{1^a, 3^a$ e 4^a linhas de $A\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^5$ e constitui uma base de L_A.

$\mathfrak{L}_U^p = \{1^a, 2^a$ e 3^a linhas de $U\}$ é outra base de $\mathcal{L}_A$ (mais simples).

$$\dim L_A = \dim L_U = 3$$

• <u>O espaço das colunas não é invariante pelo método de eliminação de Gauss</u>.

No entanto, pode afirmar-se que:

As colunas linearmente independentes de A são as que correspondem (na ordem) às colunas de U que são linearmente independentes.

$\mathfrak{L}_A^p = \{1^a, 3^a \text{ e } 5^a \text{ colunas de } A\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^4$ e constitui uma base de C_A.

$$\dim C_A = \dim C_U = 3$$

• <u>Conclusão</u>:

$$\dim L_A = \dim L_U = \dim C_A = \dim C_U = \text{car } A = \text{car } U = 3$$

• <u>Caracterização do núcleo</u>:
N_A é um subespaço de $\mathbb{R}^5$ com

$$\begin{aligned} \dim N_A &= \text{número de colunas de } A \text{ - característica de } A \\ &= \text{número de incógnitas livres} = 2 \end{aligned}$$

Se $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ então $s_1 := u_2$ e $s_2 := u_4$ são as incógnitas livres.

Qualquer elemento de $N(A)$ pode ser expresso como combinação linear de 2 dois vectores, digamos u_{h1} e u_{h2}, cujos coeficientes escalares são as incógnitas livres:

$$u = s_1\, u_{h1} + s_2\, u_{h2} \qquad\qquad s_1, s_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Para obter a base $\{u_{h1}, u_{h2}\}$ de N_A procede-se do seguinte modo (recorde-se que as equações $A\,u = 0$ e $U\,u = 0$ são equivalentes):

u_{h1} é a solução de $U\,u = 0$ com $u_{h1} = (a, \boxed{1}, b, \boxed{0}, c)$

u_{h2} é a solução de $U\,u = 0$ com $u_{h2} = (d, \boxed{0}, e, \boxed{1}, f)$

A equação $U\,u = 0$ tem como soluções vectores u cujas componentes satisfazem:

$$\begin{cases} u_5 = 0 \\ u_3 = -2\,u_4 = -2\,s_2 \\ u_1 = -2\,u_2 + 2\,u_4 = -2\,s_1 + 2\,s_2 \end{cases}$$

Tomando $s_1 = 1$ e $s_2 = 0$, obtém-se $u_{h1} = (-2, 1, 0, 0, 0)$.
Tomando $s_1 = 0$ e $s_2 = 1$, obtém-se $u_{h2} = (2, 0, -2, 1, 0)$.

$$N_A = N_U = L(\{(-2, 1, 0, 0, 0), (2, 0, -2, 1, 0)\})$$