Formas Quadráticas: Aplicação ao produto interno

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e considere-se a função

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad F(x,y) = x^t A y$$

em que se identificam os elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$ com os correspondentes vectores coluna. Pretende-se saber quais as condições a impor a A por forma que F defina um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

Analisemos as propriedades de um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

(1) Linearidade na 1ª variável:

$$F(\alpha x + \beta \tilde{x}, y) = (\alpha x + \beta \tilde{x})^t A y = \alpha x^t A y + \beta \tilde{x}^t A y = \alpha F(x,y) + \beta F(\tilde{x}, y).$$

Logo, F é linear na 1ª variável para qualquer matriz real A.

(2) Simetria:

$$F(y,x) = y^t A x = (y^t A x)^t = x^t A^t y.$$

Donde se conclui sem dificuldade que F é simétrica se e só se $A = A^t$ (A é simétrica).

(3) Positividade:

$$Q_A(x) = F(x,x) = x^t A x > 0 \quad \text{se } x \neq 0.$$

Então F é positiva se e só se a forma quadrática associada à matriz A, Q_A, é definida positiva.

Concluímos assim que F define um produto interno em $\mathbb{R}^n$ se e só se a matriz A é simétrica e a forma quadrática que lhe está associada é definida positiva.

Uma vez que as matrizes simétricas são diagonalizáveis por meio de matrizes unitárias, podemos ainda dar uma outra caracterização deste resultado. De facto, sendo simétrica existe uma matriz unitária S tal que $\Lambda = S^t A S$, em que $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ é a matriz dos valores próprios de A. Ora, definindo $u = S^t x$, tem-se

$$Q_A(x) = x^t A x = u^t \Lambda u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j^2,$$

pelo que Q_A é definida positiva se e só se os valores próprios de A são positivos.

Resulta daqui que F define um produto interno em $\mathbb{R}^n$ se e só se a matriz A é simétrica e os valores próprios de A são todos positivos.

Concretizemos para $n = 2$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e F_α a função definida por

$$F_\alpha(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \alpha(x_1 y_2 + x_2 y_1), \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se reconhece que $F_\alpha = x^t A_\alpha y$, em que $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$. A_α é simétrica (independentemente do valor de α) e tem como polinómio característico

$$p_\alpha(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - \alpha^2 = (1 - \alpha - \lambda)(1 + \alpha - \lambda),$$

pelo que os valores próprios de A_α são $\lambda_1 = 1 - \alpha$ e $\lambda_1 = 1 + \alpha$. De acordo com as conclusões obtidas anteriormente, F_α define um produto interno em $\mathbb{R}^2$ para todos os valores de α tais que $|\alpha| < 1$.