Teorema 1 *Seja U uma matriz $m \times n$ (real ou complexa) em escada de linhas com p pivôs. Então*

(i) As colunas de U que contêm pivôs são linearmente independentes em $\mathbb{K}^m$,

(ii) As linhas não nulas de U são linearmente independentes em $\mathbb{K}^n$,

(iii) $$\begin{aligned} \dim L_U &= \textit{número de linhas de } U \textit{ linearmente independentes} = \textit{característica de } U \\ &= \textit{número de colunas de } U \textit{ linearmente independentes} = \dim C_U \end{aligned}$$

(iv) Se $p = n$ então $N_U = \{0\}$ e se $p < n$ um conjunto gerador do núcleo de U é formado pelos $n - p$ vectores que se obtêm dando a cada uma das incógnitas livres o valor 1 e o valor 0 às restantes e sendo as outras componentes determinadas por forma a satisfazer a equação $Uu = 0$. Este conjunto constitui uma base para o núcleo de U.

V obtém-se de U eliminando as colunas sem pivô e as linhas nulas.
V $(p \times p)$ é triangular superior e não tem zeros na diagonal principal $\Rightarrow$ V é não-singular $\Rightarrow$

$$V\hat{u} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{u} = 0 (\in \mathbb{K}^p) \;\Leftarrow\; V^t \hat{u} = 0 \qquad (1)$$

(i) $\{\widetilde{C}_1, \ldots, \widetilde{C}_p\} \subset \mathbb{K}^m$ - conj. das colunas de U com pivô,
$\{c_1, \ldots, c_p\} \subset \mathbb{K}^p$ - correspondente conj. das colunas de V (eliminam-se as componentes referentes às linhas nulas).
Tem-se

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ \widetilde{C}_1 & & \widetilde{C}_2 & & \widetilde{C}_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$V = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array}$$

$$\mathbb{K}^m \ni 0 = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \widetilde{C}_k \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{K}^p \ni 0 = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k c_k = V\hat{u} \quad \text{com } \hat{u} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

(1) $\Rightarrow$ **$\{c_1, \ldots, c_p\}$ é linearmente independente em $\mathbb{K}^p$**

(2) $\Rightarrow$ $\{\widetilde{C}_1, \ldots, \widetilde{C}_p\}$ é linearmente independente em $\mathbb{K}^m$.

(ii) $\{L_1, \ldots, L_p\} \subset \mathbb{K}^n$ - conj. das linhas não nulas de U,

$\{\ell_1, \ldots, \ell_p\} \subset \mathbb{K}^p$ - correspondente conjunto das linhas de V (eliminam-se as componentes nulas referentes às colunas sem pivô).

$$\mathbb{K}^n \ni 0 = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k L_k \quad \Rightarrow \quad \mathbb{K}^p \ni 0 = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \ell_k = V^t \hat{u}$$

(1) $\Rightarrow$ **$\{L_1, \ldots, L_p\}$ é linearmente independente em $\mathbb{K}^n$.**

(iii) Se juntarmos ao conjunto das linhas não nulas uma linha nula, obtém-se um conjunto linearmente dependente (pois contém o vector zero). Logo,

$$\begin{aligned} \dim L_U &= \text{número de linhas de } U \text{ linearmente independentes} \\ &= \text{número de linhas não nulas} \\ &= \text{número de pivôs} = \text{característica de } U \end{aligned}$$

Se juntarmos ao conjunto das colunas com pivô uma coluna sem pivô essa coluna é uma combinação linear finita das coluna com pivô e, portanto, existe uma combinação linear finita que representa o vector zero sem que todos os coeficientes escalares sejam nulos, ou seja, o conjunto é linearmente dependente. Logo,

$$\begin{aligned} \dim C_U &= \text{número de colunas de } U \text{ linearmente independentes} \\ &= \text{número de colunas com pivô} \\ &= \text{número de pivôs} = \text{característica de } U \end{aligned}$$

(iv) $n = p \Rightarrow u = 0$ e a única solução de $Uu = 0 \Leftrightarrow N_U = \{0\}$.

Se $p < n$ então, como vimos anteriormente, podemos exprimir as p incógnitas não livres do vector u_h solução de $Uu_h = 0$ em função das $n - p$ incógnitas livres (sistema com grau de liberdade $n - p$), podendo a solução geral daquela equação ser expressa como combinação linear dos vectores que se obtêm pelo processo descrito no enunciado (as incógnitas livres são os coeficientes escalares nessa combinação linear). Se $s_1, \ldots, s_{n-p}$ forem as incógnitas livres, as soluções u_h de $Uu_h = 0$ são da forma

$$u_h = \sum_{k=1}^{n-p} s_k u_{hk}$$

em que

$$u_{hk} = [* \ldots *, 0, * \ldots *, 0, * \ldots *, 1, * \ldots * 0, * \ldots *]^t$$

1 - na posição k,

0 - nas posições das restantes incógnitas livres e

$*$ - nas posições das incógnitas não livres, cada um é obtido em função das incógnitas livres.

Decorre desta representação que o conjunto $\{u_{hk}\}_{k=1}^{n-p}$ é linearmente independente ($u_h = 0 \Rightarrow s_k = 0, k = 1, \ldots, n-p$) e, portanto, é uma base do núcleo de U.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluções da equação $Uu_h = 0$:

$$u_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u_2 + 2u_4 \\ u_2 \\ -2u_4 \\ u_4 \\ 0 \end{bmatrix} = u_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Uu_h = 0,\ 3^{\text{a}}\text{eq.} \mapsto\ u_5 = 0$
$Uu_h = 0,\ 2^{\text{a}}\text{eq.} \mapsto\ u_3 + 2u_4 + 3u_5 = 0 \mapsto u_3 = -2u_4 = -2s_2\ (s_2 = u_4)$
$Uu_h = 0,\ 1^{\text{a}}\text{eq.} \mapsto\ u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4 + 5u_5 = 0 \mapsto u_1 = -2u_2 + 2u_4 = -2s_1 + 2s_2\ (s_1 = u_2)$