Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B) 5 de Janeiro de 2015 - 9:00h

MEMec

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I (12 val.)

1. Determine o valor dos integrais:

$$\text{i)} \int_1^e x^2 \ln^2 x \, dx \,, \qquad \text{ii)} \int_2^3 \frac{x^3 + x^2}{(x+1)^2(x-1)} \, dx \,.$$

Resolução. (i) Primitivando por partes $x^2 \ln^2 x$,

$$P\left(x^2 \ln^2 x\right) = \frac{x^3}{3} \ln^2 x - P\left(\frac{x^3}{3} \frac{2\ln x}{x}\right)$$

Primitivando por partes $\frac{2x^2}{3} \ln x$, obtém-se

$$P\left(\frac{2x^2}{3} \ln x\right) = \frac{2x^3}{9} \ln(x) - P\left(\frac{2x^3}{9} \frac{1}{x}\right) = \frac{2x^3}{9} \ln(x) - P\left(\frac{2x^2}{9}\right) = \frac{2x^3}{9}\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right)$$

ou seja

$$P\left(x^2 \ln^2 x\right) = \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2x^3}{9}\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\left(\ln^2 x - \frac{2\ln(x)}{3} + \frac{2}{9}\right)$$

e pela fórmula de Barrow tem-se finalmente

$$\int_1^e x^2 \ln^2 x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\left(\ln^2 x - \frac{2\ln x}{3} + \frac{2}{9}\right)\right]_1^e = \frac{5e^3 - 2}{27} \,.$$

(ii) A função integranda é uma função racional não própria

$$\int_2^3 \frac{x^3 + x^2}{(x+1)^2(x-1)} \, dx = \int_2^3 \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} \, dx = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{(x+1)(x-1)}\right) dx$$

A função integranda $\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$ é agora uma função racional própria que se decompõe em fracções simples obtendo-se a igualdade seguinte para o integral,

$$\int_2^3 \frac{1}{(x+1)(x-1)} \, dx = A \int_2^3 \frac{1}{x-1} \, dx + B \int_1^2 \frac{1}{x+1} \, dx$$

A determinação das constantes A, B é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$1 = (A+B)x + A - B \,,$$

vindo que

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1. \end{cases}$$

Obtém-se $A = 1/2,\ B = -1/2$, e conclui-se da fórmula de Barrow que:

$$\int_2^3 \frac{x^3 + x^2}{(x+1)^2(x-1)}\, dx = [x]_2^3 + 1/2\,[\ln(x-1)]_2^3 - 1/2\,[\ln(x+1)]_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

▪

2. Seja a função

$$g(x) = \int_0^{\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cos\sqrt{t}\, dt\ , \qquad x \in\ .$$

i) Defina a função derivada de g.

ii) Determine, usando a mudança de variável $\sqrt{t} = u$, o valor de $g(\pi)$.

Resolução.

i) A função $F(x) = \int_0^x \cos\sqrt{t}\, dt$ é um integral indefinido de uma função contínua em $[0, +\infty[$ e portanto diferenciável do teorema fundamental do cálculo. Como $g(x) = \int_0^{\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cos\sqrt{t}\, dt = F\left(\frac{x^2}{9}\right)$, resulta da composição de funções diferenciáveis, g é também diferenciável em $\mathbb{R}$. A função derivada de g é definida por $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e

$$g'(x) = \frac{2x}{9}\cos\frac{|x|}{3}\,.$$

ii) $F(\pi) = \int_0^{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} \cos\sqrt{t}\, dt$. Integrando por substituição, usando a mudança de variável, $t = u^2$, tem-se

$$\int_0^{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} \cos\sqrt{t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2u\cos u\, du =$$

Integrando por partes

$$= [2u \operatorname{sen} u]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\operatorname{sen} u\, du =$$

e da fórmula de Barrow tem-se

$$= \frac{\pi}{3}\sqrt{3} + [2\cos u]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3} - 1\,.$$

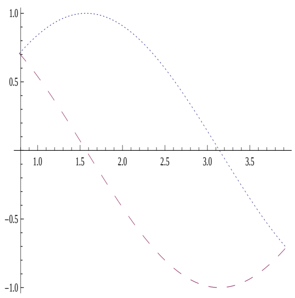
▪

3. Calcule a área da região plana A definida por

$$A = \{(x,y) \in^2 :\ \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}\ \wedge\ \cos x \le y \le \operatorname{sen} x\}\,.$$

Resolução.

A figura seguinte descreve a fronteira da região A



A área da região A é dada por:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \operatorname{sen} x - \cos x\ dx\,.$$

Tem-se, pela fórmula de Barrow, que

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \operatorname{sen} x - \cos x \, dx = [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\,.$$

▪

4. Sendo $\varphi :\to$ uma função contínua mostre que

$$\int_0^{\pi} \varphi(\operatorname{sen} x)\, dx \;=\; 2\int_0^{\pi/2} \varphi(\cos x)\, dx\,.$$

Resolução.

Integrando por substituição, usando a mudança de variável, $x = \pi/2 - t$, tem-se

$$\int_0^{\pi} \varphi(\operatorname{sen} x)\, dx \;=\; \int_{\pi/2}^{-\pi/2} (-1)\varphi(\operatorname{sen}(\pi/2 - t))\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-1)\varphi(\cos(t))\, dt = 2\int_0^{\pi/2} \varphi(\cos t)\, dt\,.$$

▪

II (8 val.)

1. Estude a natureza as séries seguintes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+n+5} \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg}(\frac{1}{n})\ .$$

Resolução.

Considerem-se as sucessões $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+n+5}$ e $b_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in \mathbb{R}^+.$$

Do critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 3/2 > 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+n+5}$ é também convergente.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ é convergente do critério de D'Alembert, uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Uma vez que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$, tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{arctg}(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{arctg}(\frac{1}{n})$$

é divergente, pois não satisfaz a condição necessária para a convergência de séries.

▪

2. Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{2n+1}}\ .$$

i) Determine para que valores de $x \in$ a série converge absolutamente.

ii) Determine a soma da série para $x = 2$.

Resolução.

(i) Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{\frac{1}{2^{2n+3}}} = 4$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{2n+1}}$ converge absolutamente se $|x-1| < 4$ i.e $-3 < x < 5$ e diverge em $\mathbb{R}\setminus[-3,5]$.

Para $x = -3, x = 5$ as séries númericas respetivas, $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}$ são divergentes pois não satisfazem a condição necessária para a convergência de séries.

(ii) Para $x = 2$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n+1}}$, é uma série de geométrica convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} R^n$ de razão $|R| = \frac{1}{4} < 1$. A soma da série é

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}\,.$$

▪

3. Indique o desenvolvimento da série de Taylor relativo a 0 associada à função $h :]-1,+\infty[\to$, $h(x) = \ln(x+1)$ indicando o intervalo em que esse desenvolvimento representa a função.

Resolução. A série de Taylor em questão é definida por,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,, \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{h^{(n)}(0)}{n!}$$

Considere-se

$$h'(x) = (\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n\,, \quad |x| < 1$$

Primitivando, tem-se

$$\ln(x+1) + C = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$$

Como para

$$x = 0\,, \quad \ln 1 + C = 0$$

tem-se

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\,, \quad |x| < 1$$

▪

4. Seja um polinómio P tal que $P(x) > 0$ para $x \in^{+}$, e a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{P(n)}$. Conclua, por meio de um exemplo, que se o grau de P for menor que 2, a série não é absolutamente convergente em ambos os extremos do intervalo $]-1,1[$.

Resolução. Seja $P_i(x) = x^i > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$ e $i = 0, 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{P_i(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^i}$$

$$x = 1\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^i} \qquad\qquad x = -1\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^i}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^i}$$

Sendo, para $i = 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, uma série de Dirichlet divergente e para $i = 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, uma série também divergente, pois não satisfaz a condição necessária para a convergência de séries.

▪