Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, 1º Teste, 2º Teste (Versão A)   26 de Janeiro de 2015 - 8:30h

MEMec

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I (3,5 val.) 1ºteste/Exame

1. Considere a sucessão de termos positivos

$$u_1 = 3, \qquad u_{n+1} = \frac{3(1+u_n)}{3+u_n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostre por indução matemática que sucessão u_n é monótona.

ii) A sucessão u_n é limitada? Justifique.

iii) Sendo v_n uma sucessão convergente de termos em $[0,1[$ a sucessão $w_n = u_n + v_n$ é convergente e tem limite em $[0, 1+\sqrt{3}[$? Justifique.

2. Determine em $\overline{\mathbb{R}}$, se existirem , os limites das sucessões

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^3}}\ ; \qquad y_n = \left(\frac{a}{2+|a|}\right)^n, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

3. Seja a_n uma sucessão monótona. A sucessão

$$b_n = \operatorname{arctg} a_n + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

é uma sucessão convergente? Justifique.

II (6,5 val.) 1ºteste/Exame

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\, e^{-\frac{1}{|x|}}\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 1\,, & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

i) A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

ii) Defina a função derivada de f.

iii) Indique os intervalos de monotonia e analise a existência de extremos da função f.

2. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x + x - 1}{\operatorname{sen} x}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

3. A equação $x^4 + 3x^2 - x = 2$ tem solução em $[-1,0]$? A solução é única? Justifique.

4. Mostre para $x \in \mathbb{R}^+$ as desigualdades

$$1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{16} < (1+x)^{3/2} < 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8}\,.$$

5. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja função derivada f' é uma função contínua e estritamente decrescente conclua, justificando, se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

. *Sugestão: Utilize o teorema de Lagrange em* $[x_2, 0]$, $x_2 \in \mathbb{R}^-$ *e em* $[0, x_1]$, $x_1 \in \mathbb{R}^+$.

III (6,5 val.) 2ºteste/Exame

1. Determine o valor dos integrais

$$\text{(i)} \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx\,, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx\,.$$

2. Determine a área da região plana limitada pelos gráficos das funções

$$y = e^x\,, \qquad y = e^{-x}\,, \qquad y = e\,.$$

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^{x^2} t\ln(t^2+1)\,dt$$

i) Mostre que f é diferenciável e determine $f'(1)$.

ii) Determine $f(1)$, usando a substituição $t^2 = u$.

4. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{x+1}^{x^4} e^{t^2}\,dt\,.$$

Mostre que

$$4g'(0) - g'(-1) + g(0) + g(-1) = 1\,.$$

IV (3,5 val.) 2ºteste/Exame

1. Analise a natureza das séries numéricas.

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+n+3}\,, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4\,3^n}{1+3^n}\,, \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2+1}.$$

2. Indique o intervalo aberto de $\mathbb{R}$ em que é absolutamente convergente a série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{(n+1)4^n}\,.$$

3. Sendo a_n uma sucessão de termos positivos convergente para zero analise se as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

são da mesma natureza.

4. Considerando que

$$(n+1)x^{n+1} - nx^n = (x-1)nx^n + x^{n+1}$$

determine para $x \in]-1,1[$ a soma para $x \neq 0$ da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n\,.$$