Axiomática dos números reais

Admitimos a existência de um conjunto, representado por $\mathbb{R}$, cujos elementos designamos por números reais, e no qual supomos definidas duas operações, a adição $(+)$ e a multiplicação $(.)$.
$\mathbb{R}$, $+$ e $.$ são designados por termos primitivos de uma axiomática.
As propriedades que se admitem como verdadeiras para os termos primitivos são designadas por axiomas.

Na axiomática dos números reais estes axiomas estão divididos em três grupos:

- *Axiomas de corpo.*
- *Axiomas de ordem.*
- *Axioma do supremo.*

Axiomas de corpo

(A1) *A adição e a multiplicação são operações comutativas em* $\mathbb{R}$.

$$x + y = y + x \qquad x.y = y.x \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

(A2) *A adição e multiplicação são operações associativas em* $\mathbb{R}$.

$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad (x.y).z = x.(y.z) \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(A3) *A adição e a multiplicação são operações com elementos neutros que são números reais distintos.*

$$\underset{u\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x + u = x \qquad \underset{v\in\mathbb{R}\setminus\{u\}}{\exists}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\ y.v = y$$

(A4) *Todo o número real tem simétrico. Todo o número real distinto de u tem inverso.*

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ x + y = u \qquad \underset{x\in\mathbb{R}\setminus\{u\}}{\forall}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ x.y = v$$

(A5) *A multiplicação é distributiva a respeito da adição.*

$$x.(y + z) = x.y + x.z \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Axiomas de ordem

Seja o subconjunto de $\mathbb{R}$ designado por $\mathbb{R}^+$ cujos elementos se designam por números reais positivos e defina-se o subconjunto de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} \, : \, -a \in \mathbb{R}^+\}$$

(A6) $\mathbb{R}^+$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}$ *para a adição e multiplicação.* i.e.

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+ \text{ e } a.b \in \mathbb{R}^+.$$

(A7) Se $a \in \mathbb{R}$ uma e só uma das proposições seguintes é verdadeira

$$a \in \mathbb{R}^+ \, ; \qquad a = 0 \, ; \qquad -a \in \mathbb{R}^+.$$

i.e.
qualquer número real distinto de 0 *é real positivo ou real negativo e nenhum real é positivo e negativo.*

Axioma do supremo

Seja $S \subset \mathbb{R}$
$M \in \mathbb{R}$ é um majorante de S se e só se $x \leq M$, qualquer que seja $x \in S$.
$m \in \mathbb{R}$ é um minorante de S se e só se $x \geq m$, qualquer que seja $x \in S$.
d é mínimo de S se e só se $d \in S$ e d é minorante de S.
c é máximo de S se e só se $c \in S$ e c é majorante de S.
Sendo V o conjunto dos majorantes de S designa-se por supremo de S, $\sup S$, o elemento mínimo de V.

(A8) *Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e majorado tem supremo em $\mathbb{R}$.*

$(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, +, .)$ é um corpo ordenado completo