Matemática Computacional
Ficha 3 (Capítulo 3)
Métodos iterativos para sistema de equações
2018/19

I. Revisão da matéria/Formulário

Normas e Condicionamento

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\|$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|\delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\| \le \frac{\text{cond}(\mathbf{A})}{1-\text{cond}(\mathbf{A})\,\|\delta_{\tilde{\mathbf{A}}}\|}\left(\|\delta_{\tilde{\mathbf{A}}}\| + \|\delta_{\tilde{\mathbf{b}}}\|\right) \qquad (\mathbf{Ax}=\mathbf{b})$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = (\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A}))^{1/2}$$

Métodos iterativos para sistemas lineares

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{Cx}+\mathbf{d} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Cx}^{(k)} + \mathbf{d}$$

Nota importante: as fórmulas de erro são idênticas às do método do ponto fixo estudado no capítulo 2, com $L = ||C||$

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}\| \le \|\mathbf{C}\|^k \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)}\|, \qquad \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}\| \le \frac{\|\mathbf{C}\|^k}{1-\|\mathbf{C}\|}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|$$

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k+1)}\| \le \frac{\|\mathbf{C}\|}{1-\|\mathbf{C}\|}\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\|$$

Método de Jacobi: $C = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})$ $\qquad x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)})/a_{ii}$

Método de Gauss-Seidel:

$$C = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}$$
$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)})/a_{ii}$$

Método de Newton para sistemas não-lineares

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}$$

II. Exercícios

II. 1 Condicionamento

1. Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Sabendo que $\|A^{-1}\|_\infty = 2/15\,\|A\|_1$, calcule o número de condição $\mathrm{cond}_\infty(\mathrm{A})$ e diga qual a sua relação com o erro na solução do sistema quando o vector b está afetado de erros.
   Resolução: Tem-se $\|A\|_\infty = \max\{3/2, 3/2, 4\} = 4$ e $\|A\|_1 = \max\{35/2, 3/2, 3\} = 3 \to$ $\|A^{-1}\|_\infty = 2/5$, donde $\mathrm{cond}_\infty(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|_\infty\,\|\mathrm{A}^{-1}\|_\infty = 8/5$.

   Ao resolver um sistema $A\mathbf{x} = b$ em que o vetor b foi perturbado, passamos a resolver $A\tilde{x} = \tilde{\mathbf{b}}$, sendo válida a fórmula de majoração do erro relativo da solução: $\|\delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\|_\infty \leq \mathrm{cond}(A)\,\|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty$. Concluímos que o erro relativo da solução vem majorado por $(2/15)\|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty$.

2. Considere a matriz

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

   Usando o método de Newton, aproxime as soluções do polinómio característico associado a A (valores própios). Dê um valor aproximado do raio espectral $\rho(A)$ e consequentemente uma estimativa de $||A||_2$.

3. Determine o número de condição da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   na norma $||.||_2$. Confirme a estimativa do exercício 3).

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$

   e considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1\ 10^{-6}]^T$. Verifique que a sua solução exacta é $x = [1\ 1]^T$.

   (a) Determine $cond(A)$ na norma $||\cdot||_\infty$.
   (b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1+\epsilon,\ \ 10^{-6}]^T$. Obtenha $||\delta_{\tilde{b}}||_\infty$ e $||\delta_{\tilde{x}}||_\infty$. Comente.

(c) Considere ainda o sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, onde $\bar{b} = [1, \quad 2 \times 10^{-6}]^T$. Obtenha $||\delta_{\bar{b}}||_\infty$ e $||\delta_{\bar{x}}||_\infty$. Comente.

5. Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine o número de condição da matriz A na norma $||.||_1$;

(b) Ao resolver um sistema com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta_b\|_1 \leq \epsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução.

6. Seja a matriz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Calcule o número de condição associado às normas $||\cdot||_\infty$, $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$.

Com o auxilio do Mathematica trace o gráfico de $\text{cond}_1(A)$ em função do parámetro a. Comente.

II. 2 Métodos iterativos para sistemas lineares

1. O sistema de equações lineares, $A\,x = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

pode, sob certas condições, ser resolvido pelo método iterativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega\, a & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega\, a \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \omega\, \mathbf{b}$$

(a) Para que valores de a o método converge se $\omega = 1$? **Solução:** $a \in]-1, 1[$

(b) se $a = -1/2$ e $\omega = 1/2$ o método converge ? **Solução:** Sim

2. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 12 \\ 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

(a) Pretende-se aproximar a solução do sistema pelo método de Jacobi. Note-se que a ordem das equações num sistema interfere com a convergência ou não do método. Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante. Que conclui sobre a convergência do método de Jacobi?
Curiosidade. *Determine as matrizes de iteração C_J e C_J^* associadas, respectivamente, ao sistema inicial e depois da reordenação e calcule os seus valores próprios.*
Com o Mathematica obtém-se $\{11, (-11 + 9i\sqrt{3})/2, (-11 - 9i\sqrt{3})/2\}$ *(para C_J)* e $\{0.2, -0.1, -0.1\}$ *(para C_J^*).*

(b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro da 4 iterada numa norma adequada. Considere $\mathbf{x}^{(0)} = [-4, -4, -4]^T$.
Sol. As componentes de cada iterada são iguais entre si: $\mathbf{x}^{(1)} = [2, 2, 2]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [4/5, ..]^T$ $\mathbf{x}^{(3)} = [26/25, ..]^T$, $\mathbf{x}^{(4)} = [124/125, ..]^T$. *E* $||\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(4)}||_\infty \leq 0.012$. *Pode usar outra norma?*

(c) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}|| < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $\mathbf{x}^{(k)}$.
Obtenha $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty = \{6, 1.026, 0.0242, 0.0018\}, k = 0, 1, 2, 3, 4.$

3. Considere um sistema de duas equações na forma geral:

$$(I) \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array} \right.$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

(a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ se e só se $|m| < 1$, onde $m = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

(b) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante, por linhas, se verifica

$$||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}||_\infty \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} ||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}||_\infty$$

onde $\mathbf{x}$ é a solução do sistema, $\mathbf{x}^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = max\left(\frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|}\right)$.

(c) Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3x & + & y & = & 8 \\ x & + & 2y & = & 4 \end{array} \right.$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [2, 1]^T$. Com base na alínea (b), determine um majorante do erro do resultado obtido.

(d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_\infty < 0.001$?

4. Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{b} = [2\ \ 4\ \ 15]^T$ e, sendo a número real,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 2 & a+1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine um intervalo (ou união de intervalos) de valores que o parâmetro real a pode tomar, de forma a garantir a convergência do método de Jacobi qualquer que seja a iterada inicial. Justifique todos os cálculos. *Sol. Por exemplo, impondo que A seja de diagonal estritamente dominante obtém condições sobre a. Conclua que se* $a \in]-\infty, -3[\bigcup]3, +\infty[$ *então método é convergente.*

(b) Com $a = 4$ e, partindo do vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ \ 2\ \ 1]^T$, determine duas iteradas do método de Jacobi para aproximar $\mathbf{x}$.

(c) Mostre que é válida a seguinte fórmula para os erros do método de Jacobi usando uma norma conveniente:

$$||\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k+1)}|| \leq \beta\, ||\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}||.$$

Justifique a norma escolhida e determine a constante β.
Sol. Determine a matriz C_J. A fórmula de erro III do teorema 3.6 é aplicável numa norma t.q. $||C_J|| < 1$. Verifique que $||C_J||_\infty = 0.75$.

(d) Calcule um majorante para a norma $||\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(2)}||$.

5. Considere o sistema linear da forma $\mathbf{Av} = \mathbf{h}$, com $\mathbf{h} = [1\ 2\ 3]^T$ e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Mostre que é possível transformar o sistema linear acima num equivalente, de modo a ser aplicável o método de Gauss-Seidel. Em seguida, efectue uma iteração do método de Gauss-Seidel, começando com iterada inicial $\mathbf{v}^{(0)} = [2\ 1\ -2]^T$.
Sol. Efectue uma troca de linhas de modo a transformar a matriz dada numa outra de diagonal estritamente dominante. Faça as mesmas trocas no vector $\mathbf{h}$. *Escreva o novo sistema e continue o ex.*

6. Seja o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ onde $\mathbf{b} = [2\ \ 1\ \ 2]^T$ e A tem a forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & a & 1 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}.$$

Mostre que qualquer que seja $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbf{R}^3$, o método de Jacobi converge para a solução do sistema se e só se for satisfeita a condição $|a| > \sqrt{2|b|}$
Sol. O mét. converge $\forall \mathbf{x}^{(0)} \Leftrightarrow \rho(C) < 1$. *Os valores próprios da matriz C_J são:* $\{0, +\sqrt{2b/a^2}, -\sqrt{2b/a^2}\}$, *logo* $\max|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2|b|}/|a| < 1$.

7. Considere a resolução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ c & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}, \quad c \in R \text{ e } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{d} \text{ vectores de } R^3.$$

(a) Mostre que se $|c| < 1/2$ o método de Jacobi é convergente, independentemente da iterada inicial $\mathbf{x}^{(\mathbf{0})}$, e é válida a seguinte fórmula do erro:

$$||\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}||_\infty \leq \frac{2|c|}{1-2|c|}||\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}||_\infty$$

OBSERV.: Note que as fórmulas são análogas às dadas para métodos do ponto fixo para equações não lineares, cap. 2, com $||C||$ no lugar de $L = max|g'(x)|$. Aqui, $g(x) = Cx + d$, donde $g'(x) = C$

(b) Faça $c = 1/5$ e $\mathbf{b} = [2\ 1\ 2]^T$. Tomando para iterada inicial $[2\ 0\ 2]^T$, efectue uma iteração pelo método de Jacobi.

(c) Nas condições da alínea anterior efectue duas iterações pelo método de Gauss-Seidel.

8. Considere o sistema de equações $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha/4 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0.6 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$, com α real e $\mathbf{b} = [0.2 \;\; 1.2 \;\; 0.3]^T$.

   (a) Determine para que valores de α o método de Jacobi converge.
   Sol. Como se tem: o Met. Jacobi converge $\forall x^{(0)} \Leftrightarrow \rho(C_j) < 1$, *calcule* $\rho(C_j)$ *em função de* α *e imponha que seja* < 1.

   (b) Com $\alpha = 0.1$ e tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [0.17 \;\; 1.22 \;\; 0.06]^T$, calcule a iterada $\mathbf{x}^{(1)}$ pelo método de Jacobi.

   (c) Determine m de modo que se tenha $\|x - x^{(m)}\| \leq 10^{-10}$ numa norma adequada.

9. Pretende-se resolver um certo sistema $A\,x = b$, onde A é uma matriz triangular superior, partindo de uma aproximação inicial arbitrária.

   (a) Se aplicarmos o método de Gauss-Seidel, podemos garantir que a solução exacta é obtida com um número finito de iterações. Justifique e diga quantas.

   (b) A mesma pergunta, em relação ao método de Jacobi.

10. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

   (a) (Interessa a ordem pela qual estão as equações dum sistema) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

   (b) Considere o novo sistema (equivalente) e e resolva a primeira equação em ordem a x_1, a segunda em ordem a x_2,... de modo a obter a fórmula geral do método de Jacobi. Com $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ calcule uma iterada do método de Jacobi. Em seguida, determine 4 iteradas do método de Gauss-Seidel também com $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$.

11. Considere o seguinte sistema linear $Ax = b$,onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um processo iterativo da forma

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + C$$

Identifique a matriz B e o vector C. Se $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ estime a norma do erro de $x^{(n)}$.

12. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + z &= 2 \\ -x + y &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 0 \end{cases}.$$

(a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.

(b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não está garantida a convergência para qualquer aproximação inicial.

13. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(a) Aproxime a solução $x = [p\ q\ r]^T$ do sistema linear (1) pelo método de Gauss-Seidel. Tome $x^{(0)} = [1\ 1\ 1]^T$ e efetue uma iteração.

Resolução:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{1}\Big(1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1\Big) = -1$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{-2}\Big(0 - 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 1\Big) = -3$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}\Big(0 - 0 - 1 \cdot (-3)\Big) = \frac{3}{5}.$$

(b) Mostre que o método de Gauss-Seidel converge para a solução única do sistema linear (1), qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Resolução:

Note-se que A não é de diagonal estritamente dominante por linhas nem colunas. Calcule-se a matriz de iteração do método de Gauss-Seidel:

$$C = -\left(D+L\right)^{-1} U = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Note-se que $\|C\|_\infty > 1$ e $\|C\|_1 > 1$ pelo que o critério da norma de C não é aplicável. Vamos, então, usar o critério do raio espectral "o método de Gauss-Seidel converge para a solução única do sistema linear qualquer que seja a aproximação inicial se e só se $\rho(C) < 1$". Os valores próprios de C:

$$\det(\lambda I - C) = \lambda \left(\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{10} \right) = \lambda^2 \left(\lambda - \frac{1}{10}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0\,, \quad \lambda_3 = \frac{1}{10}\,.$$

Portanto $\rho(C) = \max_{1 \le j \le 3} |\lambda_j| = \frac{1}{10}$. Como $\rho(C) < 1$, o método de Gauss-Seidel converge para a soluç ao única do sistema linear qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

II. 3 Métodos iterativos para sistemas não-Lineares

1. Pretende-se aplicar o método de Newton generalizado ao sistema de equações não lineares seguinte:

$$\begin{cases} \cos(x+y) + x = y \\ x^2 + \sin(xy) = 3 - y^2/2 \end{cases}$$

   (a) Escreva o sistema linear que tem de resolver na primeira iteração do método de Newton, partindo da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [x^{(0)}\ y^{(0)}]^T = [0\ \alpha]^T$.

   Resol.

   O sistema dado escreve-se na forma $f(x) = 0$ com

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} \cos(x+y) + x - y \\ x^2 + \sin(xy) - 3 + y^2/2 \end{bmatrix}$$

   e a matriz Jacobiana de f é dada por

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin(x+y) + 1 & -\sin(x+y) - 1 \\ 2x_1 + y\cos(xy) & x\cos(xy) + y \end{bmatrix}.$$

   A primeira iterada do método de Newton $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$ obtém-se resolvendo o sistema linear $J_f(x^{(0)})\Delta x^{(0)} = -f(x^{(0)})$ com $x^{(0)} = [0\ \alpha]^T$. Tem-se

$$f(x^{(0)}) = f(0,\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - \alpha \\ -3 + \alpha^2/2 \end{bmatrix}$$

$$J_f(x^{(0)}) = J_f(0,\alpha) = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) + 1 & -\sin(\alpha) - 1 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

   pelo que o sistema a resolver é

$$\begin{bmatrix} 1 - \sin(\alpha) & -\sin(\alpha) - 1 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} \alpha - \cos(\alpha) \\ 3 - \alpha^2/2 \end{bmatrix}.$$

   (b) Calcule a primeira iterada do método de Newton, no caso de $\alpha = \pi/2$.

   Resol.

   Para $\alpha = \pi/2$, o sistema linear a resolver fica

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \pi/2 & \pi/2 \end{bmatrix} \Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 3 - \pi^2/8 \end{bmatrix}$$

   e a sua solução é $\Delta x^{(0)} = [6/\pi \quad -\pi/4]^T$. Então a primeira iterada é dada por

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6/\pi \\ -\pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/\pi \\ \pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.90986 \\ 0.785398 \end{bmatrix}.$$

2. Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2(x_3+1) & = 10 \\ 3(x_2+1) + x_3^2 & = 11 \\ 3x_1 + x_3^2 & = 9 \end{array}\right.$$

tomando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [3\ 2\ 1]^T$.

(a) Mostre que o sistema linear $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ a ser resolvido para se obter $\mathbf{x}^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtenha ainda o vector $\mathbf{b}$.

(b) Resolva o sistema linear obtido em **2.a)**, pelo método de eliminação de Gauss e obtenha $\mathbf{x}^{(1)}$.

3. Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não lineares

$$\left\{\begin{array}{l} e^x - 3 = 0 \\ 3y + 4z = 3 \\ 2x^2 + 2x + 2z = 1 \end{array}\right.$$

(a) Tomando como aproximação inicial $[x_0, y_0, z_0]^T = [0, 1, 2]^T$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

(b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior, utilizando o método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

4. Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left\{\begin{array}{l} x^3 + 5y - 2z = 0 \\ e^y - z^2 = 1 \\ -x^2 + y + z = \mu, \end{array}\right.$$

onde μ é um número real conhecido, próximo de 0. Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $\mathbf{x}^{(0)} = (c, 0, 0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $\mathbf{x}^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1. \end{bmatrix}$$

(a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

(b) Verifique para que valores de c o sistema linear considerado tem solução única.

No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

(c) No caso de $c = 1$, resolva o sistema pelo método de Jacobi e calcule $\mathbf{x}^{(1)}$ (primeira iterada do método de Newton).