Matemática Computacional
Ficha 1

Capítulo 1

Nos exercícios do capítulo 1 os números são representados em base decimal. Seja x o valor exacto duma grandeza real e seja $\tilde{x}$ uma aproximação de x, ou seja $x \simeq \tilde{x}$. Designa-se por $e_x = x - \tilde{x}$ o *erro de $\tilde{x}$ em relação a x*. Ao valor $|e_x|$ chama-se *erro absoluto* de $\tilde{x}$. Se $x \neq 0$, define-se

$$\delta_x = \frac{x - \tilde{x}}{x} \tag{1}$$

e chama-se a $|\delta_x|$ o *erro relativo de $\tilde{x}$ em relação a x*. Ao produto $100\,|\delta_x|$ expresso em percentagem chama-se *percentagem de erro*.

Observ. Também se usa a notação $e_{\tilde{x}}$ (em vez de e_x) e $\delta_{\tilde{x}}$ (em vez de δ_x).

Sobre erros em cálculos funcionais: no cálculo de $f(\bar{x})$ em vez de $f(x)$ (onde x é o valor exacto), podem-se usar as fórmulas (ver sebentas no Fénix: Notas de aulas, TD-MT-2010 (secção 1.4.1) e Apontamentos de Mat Computacional, MG-PL-Jan 2014)

$$e_{f(\tilde{x})} = f(x) - f(\tilde{x}) \approx f'(x) e_{\tilde{x}}, \quad \delta_{f(\tilde{x})} = \frac{e_{f(\tilde{x})}}{f(x)} \approx \frac{x\, f'(x)}{f(x)}\, \delta_{\tilde{x}} \tag{2}$$

No caso de n variáveis reais $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ as fórmulas generalizam-se (ver MG-PL-Jan 2014—fórmulas (1.16) e (1.20)), aparecendo as derivadas parciais de f em relação às variáveis:

$$e_{f(\tilde{x})} = f(x) - f(\tilde{x}) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) e_{\tilde{x}_k} \tag{3}$$

$$\delta_{f(\tilde{x})} = \frac{e_{f(\tilde{x})}}{f(x)} \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)}{f(x)}(x)\, \delta_{\tilde{x}_k} \tag{4}$$

1. Represente x em vírgula flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos

   a) $x = 1/6$ b) $x = 1/3$ c) $x = -83784$
   d) $x = -83785$ e) $x = 83798$ f) $x = 0.0013296$

Cancelamento subtractivo

2. Deduza a seguinte fórmula para δ_z, onde $z = x - y$, sendo x e y números reais

$$\delta_z = \frac{e_z}{z} = \frac{x}{x-y}\left(\frac{e_x}{x}\right) - \frac{y}{x-y}\left(\frac{e_y}{y}\right) = \frac{x}{x-y}\frac{e_x}{x} - \frac{y}{x-y}\frac{e_y}{y}$$

   Conclua que o erro relativo de z, $|\delta_z|$, pode ser muito grande, mesmo que o erro absoluto seja pequeno quando x e y são próximos. Como ilustração, considere os dois exercícios seguintes.

3. Considere os números $x = \pi = 3.1415926...$ e $y = 2199/700 = 3.1414285....$

   a) Considere um sistema que utiliza 4 dígitos na mantissa e arredondamento simétrico. Determine aproximações $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ de x e y, respectivamente, nesse sistema. Obtenha ainda $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$.
   Solução: $\tilde{x} = fl(x) = 0.3142 \times 10^1$, $\tilde{y} = fl(y) = 0.3141 \times 10^1$. *Usando esses valores, tem-se* $\tilde{z} = 0.1 \times 10^{-2}$.

   b) Determine a unidade U de arredondamento do sistema. Calcule os erros absolutos e relativos de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, bem como as percentagens de erro. Comente.
   Solução: *Tem-se* $U = 0.5 \times 10^{-3}$. *Erros relativos:* $|\delta_x| \simeq 0.131 \times 10^{-3}$, $|\delta_y| \simeq 0.137 \times 10^{-3}$. *Note que estes erros não excedem U, como seria de esperar.*

   c) Calcule os erros absoluto e relativo de $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$ em relação a $z = x - y$.
   Solução: *Tem-se* $|\delta_z| \simeq 5.10$, *ou seja,* $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$ *apresenta 510% de erro! Houve um grande aumento do erro relativo comparativamente aos erros de* $\tilde{x}$ *e* $\tilde{y}$.

   d) Com o objectivo de ilustrar a influência nos resultados da precisão utilizada, represente em vírgula flutuante com 6 algarismos na mantissa os números x e y. Determine $fl\,(\,fl(x) - fl(y)\,)$ e o respectivo erro relativo. Note que houve melhoria nos resultados em relação a b).

4. Dada a função $f(x) = 1 - \cos x$, pretende-se determinar uma aproximação para $f(10^{-2})$, num sistema decimal de vírgula flutuante, com 4 dígitos na mantissa e arredondamento por corte. Calcule (use radianos) um valor aproximado para $\cos(10^{-2}) = 0.9999500004166...$ nesse sistema. Use esse valor para calcular uma aproximação para $f(10^{-2})$ (representando-a também no sistema) e determine o erro relativo dessa aproximação.
   Solução: *Deve obter a aproximação:* $f(10^{-2}) \simeq 0.1000 \times 10^{-3}$, *com erro relativo* $\simeq 1$

5. Sabe-se que os números $\bar{a} = 3.1415$ e $\bar{b} = -3.1425$ resultaram de arredondamentos simétricos para 5 dígitos decimais. Estime o erro absoluto do valor $\bar{y} = \tan(\bar{a} + \bar{b})/2$. *ver res. TESTE 1, 8 Abril 2013, MEC, ver sebenta de MG-PL-2014, no Fénix*

Capítulo 2

1. Considere a equação $\quad \cos x - x = 0$

   (a) Prove que esta equação tem uma única raiz $z \in [0.7, 0.8]$.

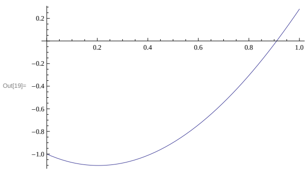
   (b) Efectue 4 iterações pelo método da bissecção (ou seja, obtenha x_1, x_2, x_3, x_4) e indique um novo intervalo que contenha z.
   Sol.:$x_4 = 0.74375$; $z \in I_4 = [0.7375, 0.74375]$

   (c) Calcule um majorante para o erro absoluto de x_2, ou seja, para $|z - x_2|$.
   Sol.: *utilizando a fórmula de erro do método para uma iterada x_k, ou seja, $|z - x_k| \leq (b-a)/2^k$, onde $[a, b]$ é o intervalo inicial, obtém-se $|z - x_2| \leq 0.025$. Note que esta fórmula permite estimar o erro de x_k, sem termos de calcular x_k.*

   (d) A partir da fórmula de erro acima, determine o número k de iterações necessárias para garantir $|z - x_k| < \epsilon$, com $\epsilon = 10^{-4}$.
   Sol.:*basta impor $(b - a)/2^k < \epsilon$. Conclua que, a partir de $k = 10$, temos a garantia de x_k satisfazer a precisão requerida.*

2. Considere a equação $\quad 3x^2 - e^x = 0$

(a) Prove que a equação tem uma única raiz $z \in [0, 1]$.
Sug.: *Um gráfico com base na igualdade* $3x^2 = e^x$ *sugere a existência duma raiz em* $[0, 1]$. *Faça um estudo da função* $f(x) = 3x^2 - e^x$. *Tem-se* $f(0) = -1$, $f(1) = 0.2817$. *Então, pelo Teorema de Bolzano existe pelo menos uma raiz em* $I =]0, 1[$. *É única? Como* $f'[0] = -1, f'[1.] = 3.281$, *logo* f' *tem pelo menos um zero em* I *e, sendo* $f''(x) = 6 - e^x > 0$ *em* I *(tem apenas um zero em* $x = 1.579 > 1$*), então* f' *é crescente, e tem um único zero* α, *em* I. *Também se conclui que* $f' < 0$ *entre 0 e alpha e* $f' > 0$ *de* α *a 1. Então* f *é decrescente de 0 a* α *e crescente de* α *a 1. Podemos concluir que existe um único zero de* f *em* I. *Note que o gráfico de* f *tem o sentido da concavidade voltada para cima e as conclusões estão de acordo com o gráfico seguinte*



(b) Determine um intervalo de comprimento 0.1 que a contenha. Calcule um majorante para o erro da iterada x_{10} que se obteria pelo método da bissecção (não calcule x_{10}).