Exercício começado na aula teórica 5 - para completar a resolução

Considere a função

$$g(x) = (x + 1 - \sin x)/2 \tag{1}$$

1. (a) Por aplicação do Teorema do ponto fixo, mostre que a função $g(x)$ tem um único ponto fixo $z \in [0, 1]$ e que a sucessão gerada por g converge para z, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$. (Resolvido na aula teórica 5)

Resolução

Se forem satisfeitas as condições do Teorema do Ponto Fixo no intervalo $I = [0, 1]$ para a função g, então prova-se a existência dum único ponto fixo para g em I e a convergência da sucessão $x_{m+1} = g(x_m)$ para esse ponto fixo.

i) *g, g' contínuas em I?*

Tem-se $g(x) = (1/2)(x + 1 - \sin x)$ e $g'(x) = (1/2)(1 - \cos x)$, que são obviamente contínuas (soma de funções contínuas em I, multiplicadas pela constante 1/2).

ii) *Verifica -se* $g(I) \subset I$*?*

Ou seja, as imagens por g de qualquer $x \in I$ pertencem a I? Como $g' > 0$ em $]0, 1]$, resulta que g é crescente em I. Então, para concluir que $g(I) \subset I$ basta verificar se as imagens dos extremos estão em I. Dado que $g(0) = 1/2 \in I$ e $g(1) = 0.579 \in I$ a monotonia de g permite concluir imediatamente o pretendido, ou seja, que $g(x) \in I, \forall x \in I$.

iii) *Verifica-se* $\max_{x\in I} |g'(x)| = L,\ 0 < L < 1$*?*

Sendo $g' \geq 0$ em I, tem-se

$$|g'(x)| = g'(x) = \frac{1 - \cos x}{2} \Rightarrow g''(x) = \frac{\sin x}{2}$$

Como $g''(x) > 0\, \forall x \in]0, 1]$, vem que g' é crescente em I. Logo

$\max_{x\in I} |g'(x)| = g'(1) = 0.2296$. Então verifica-se iii) com $L = 0.2296$.

Nota: também se poderia simplesmente reparar que $1 - \cos x$ será tanto maior quanto menor for $\cos x$ (o que se subtrai a 1). Deste modo, $g'(x)$ atinge o seu máximo no valor de x do intervalo $[0, 1]$ para o qual $\cos x$ é mínimo, ou seja, em $x = 1$.

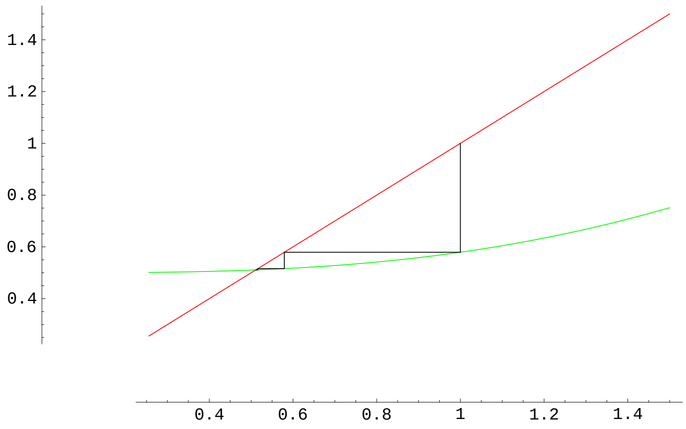
Conclusões: Pelo Teorema do ponto fixo, resulta: g tem um único ponto fixo em $I = [0, 1]$ e a sucessão

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

converge para esse ponto fixo, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 escolhida em $[0, 1]$.

(b) A figura seguinte ilustra a convergência do processo iterativo associado a g para o ponto fixo de g, começando com $x_0 = 1$. Assinale os pontos (x_1, x_1), (x_2, x_2) e as suas projecções sobre o eixo dos xx. Obtenha x_1, x_2 e x_3.

(**Sol**:*obteve-se* $x_1 \simeq 0.5792645$*,* $x_2 \simeq 0.5159280$*,* $x_3 \simeq 0.5112986$



(c) Calcularam-se mais algumas iteradas com o Mathematica (comando NestList). Comente. **Sol**:*o ponto fixo z parece estar próximo de 0.51097.*

```
N[NestList[g, 1.0, 10], 16]

{1., 0.5792645075960517, 0.5159279654502127, 0.511292863508953,
 0.5109938427034604, 0.5109747331472184, 0.5109735126540478,
 0.510973434706366, 0.5109734297281932, 0.5109734294102593, 0.5109734293899544}
```

(d) Cada termo da sucessão (2) pode ser tomado como uma aproximação do ponto fixo z. Comece por demonstrar a fórmula de erro

$$|z - x_{m+1}| \leq \frac{L}{1-L}\,|x_{m+1} - x_m|, \quad m \geq 0, \tag{3}$$

Note que (3) permite obter um majorante para o erro absoluto de x_{m+1}, depois de calculados x_m e x_{m+1}. Tomando $x_0 = 1$, utilize a fórmula acima para obter um majorante para o erro absoluto de x_2.

(e) Em vez de (3), utilize

$$|z - x_m| \leq L^m\,|z - x_0|, \tag{4}$$

em que é preciso um majorante para o erro da iterada inicial. Qual é a fórmula que lhe parece mais precisa, ou seja, que em princípio dá um majorante mais próximo do valor exacto do erro?

(f) Qual o número k de iterações que deveria efectuar de modo a garantir um erro $|z - x_k| \leq 10^{-5}$? **Solução**: $k = 8$.

(g) Qual a ordem de convergência do método do ponto fixo considerado? Justifique, atendendo à definição de ordem de convergência. (para aula de quarta)

2. Considere a equação não linear

$$1 - x - \sin x = 0 \tag{5}$$

(a) Mostre que a equação se pode reescrever na forma equivalente $x = g(x)$. Qual a relação entre as raízes de (5) e os pontos fixos de g? Pode concluir que a equação (5) tem uma única raiz em $[0, 1]$? Utilizando o estudo anterior, indique uma aproximação para essa raiz.

(b) A figura seguinte mostra os gráficos de f e de g bem como o da recta $y = x$. Identifique-os. Assinale o zero de f e o ponto fixo de g.

```
In[23]:=
        Plot[{g[x], x, f[x]}, {x, -2.5, 1.5}, PlotStyle ->
          {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```