Notas sobre extensões de Kan

Pedro Resende

Teoria das Categorias, LMAC e MMA, Outono de 2003

1 Definições e exemplos básicos

Sejam M, C e A categorias, e sejam dados os seguintes functores:

$$\begin{tikzcd} C & \\ M \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T"] & A \end{tikzcd}$$

Manter-se-á esta notação ao longo destas notas. A motivação para o que segue é que uma extensão de Kan pode ser encarada como uma "extensão" de um functor a uma categoria que "contém" o seu domínio. No caso dos functores acima, o objectivo será "estender" T à categoria C, vista como uma categoria que "contém" M, sendo K o functor "inclusão" (mas note-se que não tem de se tratar de uma inclusão de facto). Isto não significa, no entanto, encontrar um functor $E : C \to A$ tal que $EK = T$ (embora nalguns casos isto se passe, como veremos abaixo), mas por exemplo apenas tal que EK e T sejam naturalmente isomorfos, ou, ainda mais geralmente, tal que haja uma transformação natural entre EK e T (numa ou noutra direcção) com uma determinada propriedade universal.

Definição. Uma *extensão de Kan à esquerda de T ao longo de K* é uma seta universal de T para o functor "restrição" $A^K : A^C \to A^M$ que a cada functor $L : C \to A$ faz corresponder $LK : M \to C$. Por outras palavras, uma tal extensão consiste de um functor $\mathrm{Lan}_K T : C \to A$ e de uma transformação natural $\eta : T \Rightarrow (\mathrm{Lan}_K T) \circ K$ com a propriedade universal seguinte: para qualquer outro functor $L : C \to A$ e outra transformação natural $\sigma : T \Rightarrow LK$ existe uma e uma só transformação natural $\tilde{\sigma} : \mathrm{Lan}_K T \Rightarrow L$ tal que $\tilde{\sigma}K \cdot \eta = \sigma$. De forma análoga, uma *extensão de Kan à direita de T ao longo de K* consiste de uma seta universal $(\mathrm{Ran}_K T, \epsilon)$ de A^K para T.

Estas definições podem, como para qualquer seta universal, ser reformuladas em termos de bijecções naturais em L e em R, respectivamente:

$$\hom(\mathrm{Lan}_K T, L) \cong \hom(T, LK)$$

$$\hom(R, \mathrm{Ran}_K T) \cong \hom(RK, T)$$

Se as extensões existirem para qualquer functor T então definem adjunções em que Lan_K é um adjunto esquerdo e Ran_K é um adjunto direito:

$$\mathrm{Lan}_K \dashv A^K \dashv \mathrm{Ran}_K \ .$$

Ambas as noções definem portanto modos de "estender" a C o domínio de um functor de M para A e como com qualquer seta universal, são únicas a menos de isomorfismo (natural), se existirem.

Exemplo. (Limites como extensões de Kan.) O functor $T : M \to A$ tem um colimite se e só se tem uma extensão de Kan à esquerda ao longo do único functor $K_1 : M \to 1$, onde 1 é a categoria com apenas um objecto e a respectiva identidade. Isto é porque, dado um functor $S : 1 \to A$, uma transformação natural $\sigma : T \Rightarrow SK_1$ é precisamente um cone de T para $S(1)$ e portanto a extensão de Kan à esquerda de T ao longo de K_1 corresponde ao cone universal, cujo vértice é $\operatorname{colim} T = \mathrm{Lan}_{K_1} T(1)$. Do mesmo modo, um limite de T pode ser identificado com uma extensão à direita.

Este exemplo ilustra uma relação entre (co)limites e extensões de Kan que serve de motivação para o resultado geral seguinte:

Teorema. *Se para cada objecto c de C o functor*

$$(K \downarrow c) \xrightarrow{P} M \xrightarrow{T} A$$

tiver um colimite Lc em A, com cone universal λ, então cada seta $g : c \to c'$ em C induz uma única seta

$$Lg : Lc \to Lc'$$

que comuta com os cones universais, definindo um functor $L : C \to A$. Para cada objecto m em M definimos $\eta_m = \lambda_{1_{Km}}$, obtendo assim uma transformação natural $\eta : T \Rightarrow LK$. Estas fórmulas fazem de (L, η) uma extensão de Kan à esquerda, de T ao longo de K.

Similarmente, se para cada objecto c de C o functor

$$(c \downarrow K) \xrightarrow{Q} M \xrightarrow{T} A$$

tiver um limite Rc em A, então R estende-se a um functor $C \to A$ que juntamente com uma transformação universal ϵ definida de modo análogo a η define uma extensão de Kan à direita.

Dem.: Vamos demonstrar apenas o caso da extensão à esquerda. O outro obtém-se de forma dual (e pode ser visto em Mac Lane, cap. X). Tal como no exemplo anterior, há que relacionar os pares (E, σ), onde $E : C \to A$ é um functor e $\sigma : T \Rightarrow EK$ é uma transformação natural (ou seja, os objectos de $T \downarrow A^K$), com determinados cones. Considere-se então um tal par (E, σ) e um objecto c de C. Dada uma seta $f : Km \to c$ podemos definir a seta $\xi_f = Ef \circ \sigma_m : Tm \to Ec$:

$$Tm \xrightarrow{\sigma_m} EKm \xrightarrow{Ef} Ec\ .$$

Dada outra seta $f' : Km' \to c$ e uma seta $k : m \to m'$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} Tm \arrow[dr, "\xi_f"] \arrow[dd, "Tk"'] & \\ & Ec \\ Tm' \arrow[ur, "\xi_{f'}"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo, devido à naturalidade de σ, desde que se tenha $f' \circ Kk = f$, ou seja, se $k : f \to f'$ for uma seta em $(K \downarrow c)$, pois nesse caso o triângulo da direita é comutativo:

$$\begin{tikzcd} Tm \arrow[r, "\sigma_m"] \arrow[dd, "Tk"'] & EKm \arrow[dr, "Ef"] \arrow[dd, "EKk"'] & \\ & & Ec \\ Tm' \arrow[r, "\sigma_{m'}"'] & EKm' \arrow[ur, "Ef'"'] & \end{tikzcd}$$

Isto significa precisamente que as setas ξ_f formam um cone de TP para Ec. É então natural, nas condições do enunciado do teorema, definir para cada objecto c de C um objecto Lc de A por

$$Lc = \mathrm{colim}((K \downarrow c) \xrightarrow{P} M \xrightarrow{T} A)\ ,$$

com o cone universal λ indicado pela figura seguinte:

$$\begin{tikzcd} Tm \arrow[dr, "\lambda_f"] \arrow[dd, "Tk"'] & \\ & Lc \\ Tm' \arrow[ur, "\lambda_{f'}"'] & \end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que isto permite obter um functor $L : C \to A$. Para tal seja $g : c \to c'$ uma seta em C. Cada seta $f : Km \to c$ dá origem, por composição com g, a uma seta $gf : Km \to c'$ e tem-se que se $k : f \to f'$ é uma seta de $(K \downarrow c)$ então também é uma seta $k : gf \to gf'$ de $(K \downarrow c')$. Tomando o cone universal λ' associado ao colimite Lc', então, as componentes λ'_{gf} formam um cone de TP para Lc', e pela universalidade do cone λ resulta que existe uma e uma só seta $Lg : Lc \to Lc'$ que comuta com os cones universais. Isto faz de L um functor. Finalmente, tomando o caso particular $c = Km$ e $f = 1_{Km} : Km \to c$, definimos uma seta $\eta_m = \lambda_{1_{Km}}$, que define uma transformação natural η de T para LK com a propriedade universal pretendida. Q.E.D.

Notação. O colimite do functor TP do teorema pode ser abreviadamente descrito por $\mathrm{colim}_f\, Tm$, onde $f : Km \to c$, e o limite de TQ por $\lim_f Tm$, com $f : c \to Km$.

Exemplo. (Objectos iniciais/finais como extensões de Kan.) Se $M = 0$ é a categoria sem objectos, K é o único functor de 0 para C. Neste caso o colimite $\mathrm{colim}_f\, Tm$ é $\mathrm{colim}(0 \to A)$, i.e., é o objecto inicial de A, se este existir. Portanto o functor $\mathrm{Lan}_K T$ é o functor constante de C para A que a cada objecto de C atribui o objecto inicial de A e a cada seta a respectiva seta identidade. Concluímos assim que um objecto inicial em A pode ser identificado com uma extensão de Kan à esquerda. Da mesma forma, um objecto terminal pode ser identificado com uma extensão de Kan à direita.

2 Extensões de Kan pontuais

Se os (co)limites indicados no teorema anterior existirem todos, então as extensões de Kan são necessariamente definidas, a menos de isomorfismo natural, pelas fórmulas seguintes.

$$\begin{aligned} \mathrm{Lan}_K Tc &= \mathrm{colim}(\ (K \downarrow c) \xrightarrow{P} M \xrightarrow{T} A\ ) \\ \mathrm{Ran}_K Tc &= \lim(\ (c \downarrow K) \xrightarrow{Q} M \xrightarrow{T} A\ ) \end{aligned}$$

Uma tal extensão de Kan diz-se *pontual*.[1] Note-se que uma extensão de Kan pode, por comparação com o exemplo com $C = 1$, ser encarada como um (co)limite "global", i.e., definido colectivamente para todos os objectos de C. O caso das extensões de Kan pontuais é aquele em que o limite global é composto de limites "pontuais", i.e., tomados para cada objecto de C separadamente. No entanto a existência da extensão de Kan não implica a existência dos limites "pontuais" (a não ser em casos particulares, como aquele em que $C = 1$, i.e., onde apenas há um "ponto"). Isto significa que, embora a transformação natural η (ou ϵ) nos dê, para cada objecto de C, um cone canónico λ cujas componentes são dadas, no caso da extensão à esquerda, por $\lambda_f = Lf \circ \eta_m$ (v. demonstração do teorema), este cone pode não ser universal.

[1] A definição de extensão de Kan pontual é na verdade diferente, embora equivalente, e é feita em função da noção de functor que preserva extensões de Kan — ver Mac Lane, cap. X.

Exemplo. (Functores adjuntos como extensões de Kan.) Se $A = M$ e $T = 1_M$ então uma extensão de Kan pontual à direita é dada pela fórmula

$$(\mathrm{Ran}_K 1_M)c = \lim((c \downarrow K) \to M) .$$

Isto mostra que, para functores K que preservam os limites de C, a existência de uma extensão de Kan pontual $\mathrm{Ran}_K 1_M$ é equivalente à existência de adjunto esquerdo de K, nesse caso tendo-se $\mathrm{Ran}_K 1_M \dashv K$.

Ainda como corolários do teorema anterior temos:

Corolário. *Se M é pequena e A é cocompleta, qualquer T tem uma extensão de Kan (necessariamente pontual) à esquerda ao longo de qualquer K. O mesmo se verifica para extensões de Kan à direita se A for completa.*

Corolário. *Se K for cheio e fiel então para extensões pontuais à esquerda (resp. direita) a transformação natural η (resp. ϵ) é um isomorfismo. Em particular, se M for uma subcategoria cheia de C e K for a inclusão então uma extensão pontual de Kan à esquerda de T ao longo da inclusão é tal que $(Lan_K T) \circ K = T$, i.e., $Lan_K T$ é genuinamente uma extensão de T, e $\eta = 1_T$.*

Lema. *Seja $L, \eta : T \Rightarrow LK$ uma extensão de Kan pontual à esquerda de T ao longo de K. Então existe uma bijecção*

$$\hom_A(Lc, a) \to \hom_{\mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}}}(\hom_C(K-, c), \hom_A(T-, a))$$

natural em c e em a.

(Nota: este resultado pode ser tornado mais forte, conduzindo a uma definição alternativa da noção de extensão de Kan pontual — v. Mac Lane, sec. X.5.)

Dem.: Seja (L, η) uma extensão de Kan pontual à esquerda, onde portanto se tem para cada objecto c de C

$$Lc = \mathrm{colim}((K \downarrow c) \to M \to A) .$$

Seja a um objecto de A e considere-se o functor contravariante $\hom_A(-, a)$ como um functor $A \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$, que portanto preserva colimites (porquê?). Seja $T^a : M \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ o functor $\hom_A(T-, a) = \hom_A(-, a) \circ T$. Uma vez que $\hom_A(-, a) : A \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ preserva colimites resulta que, para cada c, $L^a c = \hom_A(Lc, a)$ é um colimite do functor

$$(K \downarrow c) \to M \xrightarrow{T^a} \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} ,$$

com cone universal para $L^a c$ igual à imagem por $\hom_A(-,a)$ do cone universal para Lc. Portanto obtém-se uma extensão de Kan pontual à esquerda de T^a ao longo de K. Para cada functor $V : C \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$,

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, "V"] & & \\
M \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T"'] & A \arrow[r, "\hom_A(-,a)"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}
\end{tikzcd} ,$$

tem-se assim uma bijecção natural em V

$$\hom_{(\mathbf{Set}^{\mathrm{op}})^C}(L^a, V) \cong \hom_{(\mathbf{Set}^{\mathrm{op}})^M}(T^a, VK) \ ,$$

ou, equivalentemente, uma bijecção natural em V

$$\hom_{\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}}(V, L^a) \cong \hom_{\mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}}}(VK, T^a) \ .$$

Para simplificar a notação escreveremos a bijecção acima como

$$\mathrm{Nat}(V, L^a) \cong \mathrm{Nat}(VK, T^a) \ .$$

Tomando em particular $V = \hom_C(-,c)$ obtém-se, pelo lema de Yoneda, uma bijecção

$$\hom_A(Lc, a) = L^a c \cong \mathrm{Nat}(\hom_C(-,c), L^a) \cong \mathrm{Nat}(\hom_C(K-,c), T^a) \ ,$$

de que resulta a bijecção

$$\hom_A(Lc, a) \cong \mathrm{Nat}(\hom_C(K-,c), \hom_A(T-,a))$$

do enunciado do lema (exercício: justificar a naturalidade em a e em c). Q.E.D.

3 O mergulho de Yoneda revisitado

Definição. O functor K é *denso* (resp. *co-denso*) se $(\mathrm{Id}_C, \mathrm{Id}_K)$ é uma extensão de Kan pontual à esquerda (resp. direita) de K ao longo do próprio functor K.

Por outras palavras, K é denso se C é um "fecho" para certos colimites da imagem da categoria M em C. Mais precisamente, cada objecto c de C é um colimite de

$$(K \downarrow c) \xrightarrow{P} M \xrightarrow{K} C$$

com o cone universal cuja componente associada ao objecto $(m, f : Km \to c)$ de $(K \downarrow c)$ é f.

Exemplo. Qualquer conjunto só com um ponto é denso em $\mathbf{Set}$.

Exemplo. Se C for um reticulado completo e M um subconjunto de C, sendo K a inclusão, então K é denso se e só se o fecho para supremos de M em C for o próprio C.

Exemplo. Já vimos que qualquer functor em $\mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}}$ é um colimite de functores representáveis.[2] Mais precisamente, vimos que a demonstração deste facto se faz mostrando que qualquer functor S em $\mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}}$ é um colimite

$$\mathrm{colim}(\mathrm{El}(S) \to \mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}})\ ,$$

onde $\mathrm{El}(S)$ é a categoria dos elementos de S, que pode ser identificada com $(* \downarrow S)$, onde $*$ é um qualquer conjunto com um só elemento. O colimite pode ser rescrito

$$\mathrm{colim}(\ (* \downarrow S) \xrightarrow{Q} M \xrightarrow{Y} \mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}}\ )\ ,$$

(verifique!) onde $Y : M \to \mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}}$ é o mergulho de Yoneda. Se agora observarmos que, pelo lema de Yoneda, as categorias $(* \downarrow S)$ e $(Y \downarrow S)$ são isomorfas (verifique! — a primeira é uma categoria de setas do conjunto $*$ para o functor S e a segunda é uma categoria de setas do functor Y para S), conclui-se que o colimite pode ser ainda rescrito como

$$S = \mathrm{colim}(\ (Y \downarrow S) \xrightarrow{P} M \xrightarrow{Y} \mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}}\ )\ ,$$

significando precisamente que o mergulho de Yoneda é denso.

A situação em que $K = Y$ é particularmente interessante, na medida em que $\mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}}$ pode num certo sentido ser vista como a categoria cocompleta "livremente gerada" por uma categoria pequena M, conforme o teorema seguinte ilustra.

Teorema. *Seja $C = \mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}}$ e seja K o mergulho de Yoneda Y. Se M for pequena e A for cocompleta, então $Lan_Y T \dashv R$, onde $R(a) = \hom_A(T(-), a)$.*

Dem.: Nas condições dadas existe extensão de Kan à esquerda, pontual, de T ao longo de Y. Seja $L = \mathrm{Lan}_Y T$. O lema da secção anterior dá-nos uma bijecção

$$\hom_A(L(S), a) \to \hom_C(\hom_C(Y-, S), Ra) \tag{1}$$

natural em a e no functor S. No caso presente em que $C = \mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}}$ temos, para cada objecto m de M,

$$\hom_C(Ym, S) = \hom_C(\hom_M(-, m), S) \cong S(m)\ ,$$

[2] Nas aulas vimos a versão deste resultado para functores covariantes, em que o diagrama para o colimite é, para cada functor $S : M \to \mathbf{Set}$, um functor contravariante $\mathrm{El}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}^M$.

onde a bijecção resulta do lema de Yoneda e é natural em S. A bijecção também é natural em m, ou seja, há um isomorfismo natural

$$\hom_C(Y-, S) \cong S \ ,$$

do qual resulta, por substituição em (1), a seguinte bijecção natural em a e em S,

$$\hom_A(L(S), a) \cong \hom_C(S, Ra) \ ,$$

ou seja, uma adjunção em que $L \dashv R$. Q.E.D.

Corolário. *Seja $C = \mathbf{Set}^{M^{\mathrm{op}}}$ e seja K o mergulho de Yoneda Y. Se M for pequena e A for cocompleta, então existe um e um só functor $L : C \to A$ que preserva colimites e tal que $LY = T$. O functor L é definido por*

$$Lc = \mathrm{colim}((K \downarrow c) \to M \to A)$$

e tem adjunto direito o functor R definido por $Ra = \hom_A(T-, a)$.