Teoria das Categorias

Ficha de exercícios 7

1. Considere a noção de categoria monoidal (v. Mac Lane). (i) Verifique que o produto tensorial de grupos abelianos define uma estrutura monoidal em **Ab** e (ii) mostre que um anel é um monóide em **Ab**.

2. (i) Mostre que numa categoria com produtos binários o functor produto define uma estrutura monoidal. (ii) Justifique que um anel não é o mesmo que um monóide em **Ab** para a estrutura monoidal definida pelo produto.

3. Seja C uma categoria com pullbacks e seja B um objecto de C. Definindo a categoria $C//B$ cujos objectos são triplos (E, d, c), onde E é um objecto de C e $d, c : E \to B$ (é útil pensar nestes objectos como grafos cujo "conjunto" de vértices é B e cujo "conjunto" de arestas é E, sendo d e c as "funções" domínio e codomínio), e cujas setas $(E_1, d_1, c_1) \to (E_2, d_2, c_2)$ são os morfismos $h : E_1 \to E_2$ que comutam com os d_i's e com os c_i's ($d_2 \circ h = d_1$ e $c_2 \circ h = c_1$), mostre que existe uma estrutura monoidal em $C//B$ que a cada par (E_1, d_1, c_1) e (E_2, d_2, c_2) associa
$$(E_1 \times_B E_2, d_1 \circ p, c_2 \circ q) ,$$
onde $E_1 \times_B E_2$, p e q são definidos pelo pullback
$$\begin{tikzcd} E_1 \times_B E_2 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & E_2 \arrow[d, "d_2"] \\ E_1 \arrow[r, "c_1"'] & B \end{tikzcd}$$
(é útil pensar em $E_1 \times_B E_2$ como o "conjunto" dos pares de arestas (a, b) que são "componíveis" no sentido em que o codomínio de a coincide com o domínio de b.)

4. (Categorias como monóides.) Considere a definição de categoria interna (v. Mac Lane, segunda edição) numa categoria C com pullbacks. Mostre que uma categoria interna com "objecto dos objectos" B é o mesmo que um monóide na categoria $C//B$ relativamente à estrutura monoidal da alínea anterior. Conclua que uma categoria pequena no sentido habitual, com conjunto de objectos O, é um monóide em $\mathbf{Set}//O$.