Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
LMAC

Introdução à Geometria

Teste 1 - 7 de Novembro de 2013 - 16h00
Duração: 90 minutos (+ 30 min)

---

1) Em $\mathbb{R}^3$ considere o plano $\mathcal{H}$ definido pelo equação $6y + z = 4$ e a família de rectas r_t com $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$r_t := (1 + t, 1, 2) + \mathcal{L}\{(t^2 + 2, 0, 1)\}.$$

(1 val.) a) Determine o espaço das direcções de $\mathcal{H}$ e, para cada t, um sistema de equações cartesianas que defina r_t.

(1 val.) b) Diga se existe alguma recta r_t que é um eixo do hiperplano $3x + z = 5$.

(1 val.) c) Determine, se existirem, os valores de t para os quais $d(r_t, \mathcal{H}) > 0$.

(1 val.) d) Determine, se existirem, os pares (t_1, t_2) para os quais $\langle r_{t_1}, r_{t_2} \rangle = \mathbb{R}^3$.

(1 val.) e) Calcule $d(r_1, r_{-1})$.

(2 val.) 2) Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim euclidiano. Mostre que a bola fechada de centro P e raio r

$$B_r(P) := \{X \in \mathcal{E} : \ d(X, P) \leq r\}$$

é um conjunto convexo.

(2 val.) 3) Classifique detalhadamente a isometria $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (-y + 3, -x + 1).$$

4) Considere as isometrias $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $f(1, 2) = (3, 4)$ e $f(3, 4) = (1, 2)$.

(1 val.) a) Diga, justificando, quantas isometrias satisfazem esta condição.

(2 val.) b) Classifique estas isometrias e determine as suas expressões analíticas.

5) Considere as rectas m_1, m_2, m_3, m_4 de $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$m_1 : \ y - x = 6, \quad m_2 : \ y = 0, \quad m_3 : \ y - x = 2 \quad \text{e} \quad m_4 : \ x + y = 0.$$

Sem determinar explicitamente as reflexões R_{m_i} $(i = 1, \cdots, 4)$, classifique detalhadamente as isometrias

(0.5 val.) a) $R_{m_1} \circ R_{m_3}$;

(0.5 val.) b) $R_{m_2} \circ R_{m_3}$;

(0.5 val.) c) $R_{m_1} \circ R_{m_3} \circ R_{m_4}$;

(0.5 val.) d) $R_{m_1} \circ R_{m_3} \circ R_{m_2}$.

6) Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(0.5 val.) a) se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma isometria que deixa uma única recta l invariante, então f é uma reflexão com deslize ao longo de l;

(0.5 val.) b) em $\mathbb{R}^2$, se l é uma recta e f é uma isometria inversa então existe uma isometria directa g tal que $f = g \circ R_l$;

(0.5 val.) c) se uma aplicação afim $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fixa três pontos, então f é a identidade;

(0.5 val.) d) em $\mathbb{R}^2$ qualquer isometria directa que fixe dois pontos distintos é a identidade;

(0.5 val.) e) se três rectas distintas l, m, n de $\mathbb{R}^2$ se intersectam num ponto P então $R_l \circ R_m \circ R_n$ é uma reflexão numa recta que passa por P;

(0.5 val.) f) em $\mathbb{R}^2$, uma isometria que não seja a identidade e que deixe duas rectas invariantes é uma reflexão;

(0.5 val.) g) se A é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^2$ cujo grupo de simetrias contém duas rotações com centros distintos então A é um conjunto não limitado;

(0.5 val.) h) se P e Q são dois pontos distintos de $\mathbb{R}^2$ então existe um número infinito de rotações ρ tais que $\rho(P) = Q$.

7) Dado um ponto $P \in \mathbb{R}^2$, seja ρ_P a meia-volta de centro em P. Mostre que:

(1 val.) a) qualquer reflexão deslizante é a composta de uma meia-volta com uma reflexão;

(1 val.) b) dados quaisquer três pontos $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$\rho_P \circ \rho_Q \circ \rho_R = \rho_R \circ \rho_Q \circ \rho_P = \rho_S \quad \text{com} \quad S \in \mathbb{R}^2.$$