

Introdução à Geometria

Teste de Recuperação / Exame - 30 de Janeiro de 2015 - 11h30

Duração: 1h30 (Teste) / 3h (Exame)

Teste 1

1. Considere em $\mathbb{R}^3$ a família de rectas r_t ($t \in \mathbb{R}$) tais que

$$r_t = (1, t, t+1) + \mathcal{L}\{(1, 1-t, 2)\}.$$

- (0,5 val.) a) Determine as equações cartesianas de r_t para cada t .
(0,5 val.) b) Indique, se existirem, os valores de t para os quais a recta r_t é um eixo do plano $\mathcal{H}$ de equação $x + 2y + 2z = 7$.
(1,0 val.) c) Indique para que valores de t a distância de r_t ao plano $\mathcal{H}$ é máxima e calcule essa distância.
(0,5 val.) d) Determine os valores de t para os quais a recta r_t e a recta $y = z = 0$ são enviezadas.

- (0,5 val.) 2. a) Calcule a aplicação afim $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que leva os pontos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ nos pontos

$$(3, 8, 7), \quad (3, 8, 8), \quad (4, 8, 7) \quad \text{e} \quad (3, 9, 7).$$

- (0,5 val.) b) Determine o ângulo entre os vectores $u = (1, -1, 0)$ e $\vec{\varphi}(u)$, onde $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a transformação linear associada a φ .
(1,5 val.) c) Justifique que φ é uma isometria de $\mathbb{R}^3$ e classifique as isometrias

$$T_v \circ \varphi, \quad \varphi \quad \text{e} \quad T_v \circ \varphi \circ R_{\mathcal{H}},$$

onde T_v é a translação associada ao vector $v = (-6, -6, -6)$ e $R_{\mathcal{H}}$ é a reflexão no plano $\mathcal{H}$ de equação $x + y + z = 0$. Indique os pontos fixos destas isometrias.

3. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas

- (0,5 val.) a) Dado um plano $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ existe apenas um número finito de isometrias $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.
(0,5 val.) b) A composta de um número par qualquer de reflexões em rectas paralelas de $\mathbb{R}^2$ é sempre uma translação perpendicular às rectas.
(0,5 val.) c) Dados dois pontos distintos P, Q em $\mathbb{R}^2$ existem exactamente dois isomorfismos afins $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferentes da identidade tais que $\varphi(P) = P$ e $\varphi^2(Q) = Q$.
(0,5 val.) d) Dadas duas rectas distintas l_1, l_2 em $\mathbb{R}^2$, existe sempre uma reflexão $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $R(l_1) = l_2$.

- (1,5 val.) 4. Descreva a isometria de $\mathbb{R}^3$ obtida por composição de três reflexões em planos paralelos.

- (1,5 val.) 5. Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano e $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ um hiperplano. Dados dois pontos $P, Q \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, determine as diferentes possibilidades para o mínimo do conjunto

$$\{d(P, X) + d(X, Q) : X \in \mathcal{H}\}$$

e indique em que pontos são atingidas.

Teste 2

- (0,5 val.) 6. a) Para cada $t \in \mathbb{R}$ indique, se possível, um referencial projectivo de $\mathbb{P}^2$ que inclua os pontos $[t : 0 : 1]$ e $[t + 1 : 0 : 1]$.
- (0,5 val.) b) Dado $t \in \mathbb{R}$, determine o ponto de intersecção da recta projectiva de $\mathbb{P}^2$ que passa nos pontos $[t : 0 : 1]$ e $[0 : 1 : 0]$ com a recta que passa nos pontos $[t + 1 : 0 : 1]$ e $[0 : 1 : 1]$.
- (1 val.) c) Sendo ℓ a recta de $\mathbb{P}^2$ definida por $y = 0$, determine as possíveis transformações projectivas $\tau : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ que verificam $\tau(\ell) = \ell$ e $\tau([t : 0 : 1]) = [t + 1 : 0 : 1]$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.
- (0,5 val.) d) Quais os pontos fixos comuns a todas estas transformações?
- (1 val.) 7. Considere a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ definida por $\phi(x, y) = [1 : x : y]$ e a correspondente identificação de $\mathbb{P}^2$ com $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1$. Determine uma cónica C de $\mathbb{P}^2$ que passe nos pontos $[1 : 0 : 0]$, $[1 : 0 : 1]$, $[1 : 1 : 0]$ e $[1 : 1 : 1]$ e tal que, com esta identificação, $C \cap \mathbb{R}^2$ seja uma elipse.
8. Seja C a curva de $\mathbb{H}$ definida por $\text{Im } z = 2 \text{Re } z$.
- (1 val.) a) Determine as isometrias $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ que preservam C e classifique-as.
- (0,5 val.) b) Determine a imagem $g(C)$ onde $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ é a isometria definida por $g(z) = \frac{z+1}{-z+1}$.
- (0,5 val.) c) Sendo $h_1 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ a reflexão na recta hiperbólica $\text{Re } z = 0$, decomponha g na forma $g = h_2 \circ h_1$ onde $h_2 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ é uma reflexão hiperbólica.
- (0,5 val.) d) Quais os pontos fixos de h_2 ?
- (0,5 val.) e) Classifique g .
9. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
- (0,5 val.) a) O conjunto de pontos equidistantes de $1 + i$ e $-1 + i$ para a distância hiperbólica em $\mathbb{H}$ é uma recta euclidiana.
- (0,5 val.) b) Uma transformação projectiva numa recta projectiva que fixa três pontos é necessariamente a identidade.
- (0,5 val.) c) Dados três pontos independentes de $\mathbb{P}^n$ existe exactamente um plano projectivo que os contém.
- (0,5 val.) d) Dada uma isometria $f : S^2 \rightarrow S^2$ existe sempre um ponto $P \in S^2$ tal que $f(P) = P$ ou $f(P) = -P$.
- (1,5 val.) 10. Dada uma recta euclidiana ℓ em $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que passa na origem, considere a família de todas as circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ que são tangentes a ℓ na origem. Qual a família das imagens destas circunferências por inversão relativamente à circunferência de raio 1 e centro na origem?