Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
LMAC

Introdução à Geometria

Teste de Recuperação / Exame - 29 de Janeiro de 2016 - 11h30
Duração: 1h30 (Teste) / 3h (Exame)

Teste 1

1. Em $\mathbb{R}^3$ considere o plano $\mathcal{H}$ definido pela equação $x + z = 7$ e a família de rectas

$$r_t = (1, 2, 3) + \mathcal{L}\{(\cos t, \sin t, 1)\}, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

(0,5 val.) a) Determine as equações cartesianas das rectas r_t para cada t.

(0,5 val.) b) Indique o espaço das direcções de $\mathcal{H}$.

(0,5 val.) c) Indique, se existirem, os valores de t para os quais a recta r_t é um eixo de $\mathcal{H}$.

(0,5 val.) d) Quais os valores de t para os quais $d(r_t, \mathcal{H}) > 0$?

(0,5 val.) e) Dê um exemplo, se existir, de um referencial $(O, \{e_1, e_2, e_3\})$ de $\mathbb{R}^3$ em relação ao qual a recta $r_{\frac{\pi}{4}}$ seja definida pelas equações $x_2 = x_3 = 0$.

(1 val.) f) Escreva a expressão geral de uma reflexão com deslize no plano $\mathcal{H}$.

(1,5 val.) 2. Considere a isometria $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y - 3,\ \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{y}{2} + 3\sqrt{3} \right)$$

Classifique detalhadamente as isometrias

$$f, \quad R_m \circ f \circ R_m \quad \text{e} \quad T_v \circ f,$$

onde R_m é a reflexão na recta m definida por $x - \sqrt{3}y = 0$, e T_v é a translação associada ao vector $v = (0, 4)$.

3. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(1 val.) a) Qualquer transformação afim de $\mathbb{R}^3$ com três pontos fixos é a identidade.

(1 val.) b) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma isometria cuja transformação linear associada é $\phi(v) = Av$ com

$$A = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix},$$

então f^{1234} não é uma translação.

(1,5 val.) 4. Descreva a isometria de $\mathbb{R}^2$ obtida por composição de duas reflexões deslizantes com eixos paralelos.

(1,5 val.) 5. (*Relação de Thomsen*) Dadas quaisquer três rectas ℓ, m, n de $\mathbb{R}^2$ mostre que

$$R_\ell \circ R_m \circ R_n \circ R_l \circ R_m \circ R_n \circ R_m \circ R_n \circ R_\ell \circ R_m \circ R_n \circ R_\ell \circ R_n \circ R_m \circ R_\ell \circ R_n \circ R_m \circ R_n \circ R_m \circ R_\ell \circ R_n \circ R_m = \mathrm{id}$$

onde R_ℓ, R_m e R_n são as reflexões nas rectas ℓ, m e n.

Teste 2

6. Considere os pontos $P := [1 : -1 : 0]$ e $Q := [0 : 1 : -1]$ em $\mathbb{P}^2$ e recta $\ell \subset \mathbb{P}^2$ definida por $x_0 = 0$.

(0,5 val.) a) Indique a equação da recta m que passa em P e Q.

(0,5 val.) b) Determine $\ell \cap m$.

(0,5 val.) c) Qual a equação geral das rectas projectivas $n \subset \mathbb{P}^2$ tais que $\ell \cap m \cap n \neq \varnothing$?

(0,5 val.) d) Indique um referencial projectivo de $\mathbb{P}^2$ que contenha os pontos P e Q.

(1 val.) e) Determine $\tau(l)$, onde $\tau : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ é a transformação projectiva definida pela transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_0, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(1 val.) 7. Sejam P, Q, R e S quatro pontos de $\mathbb{P}^1$ para os quais a razão cruzada $\{P, Q; R, S\}$ é $\left[\frac{1}{4} : 1\right]$. Calcule $\{P, S; Q, R\}$.

8. Considere as isometrias $f_i : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $i = 1, \ldots, 4$, definidas por

$$f_1(z) = -\overline{z} + 4, \quad f_2(z) = \frac{2}{1 - z}, \quad f_3(z) = \frac{2}{\overline{z}} \quad \text{e} \quad f_4(z) = \frac{z}{1 - z}.$$

(1 val.) a) Classifique as isometrias f_i.

(0,5 val.) b) Quais destas aplicações levam a recta hiperbólica definida por $|z| = 1$ na recta $\operatorname{Re} z = 1$.

(0,5 val.) c) Determine $f_2(\ell)$ onde ℓ é a recta hiperbólica definida por $\operatorname{Re} z = 2$.

(0,5 val.) d) Usando a isometria $f_1 \circ f_3$ indique a recta hiperbólica de $\mathbb{H}$ que é perpendicular às rectas definidas pelas equações $|z| = \sqrt{2}$ e $\operatorname{Re} z = 2$.

9. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(1 val.) a) Qualquer ponto de S^2 fica univocamente determinado pelas suas distâncias a três pontos de S^2.

(1 val.) b) Em $\mathbb{H}$ existem rectas hiperbólicas ℓ, m e n paralelas duas a duas tais que nenhuma das três está entre as outras duas.

Nota: Dadas três rectas $\ell, m, n \subset \mathbb{H}$ paralelas duas a duas, diz-se que m está entre ℓ e n se, dados quaisquer dois pontos $P \in \ell$ e $Q \in n$, o segmento de recta hiperbólico PQ intersecta m.

(1,5 val.) 10. Uma transformação projectiva τ diz-se uma *involução* se $\tau^2 = id$. Mostre que qualquer transformação projectiva de $\mathbb{P}^1$ é a composta de duas involuções.