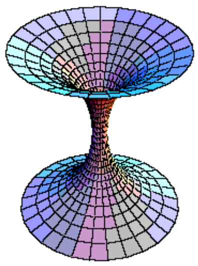
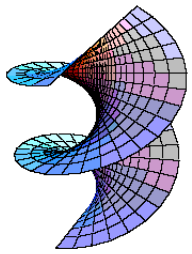
Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria II

2º Teste - 12 de Junho de 2004 - 10h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. A **catenóide** é a superfície de revolução

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2(z)\}.$$

A **helicóide** é a superfície H parametrizada pela aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v).$$

Consideramos as métricas g e h induzidas em C e H pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$.

(3 val.) (a) Mostre que

$$g = \cosh^2(z)(d\theta \otimes d\theta + dz \otimes dz),$$

onde (θ, z) são as coordenadas locais em C obtidas a partir das usuais coordenadas cilíndricas (r, θ, z) em $\mathbb{R}^3$.

(3 val.) (b) Mostre que a curvatura de Gauss de C é

$$K = -\frac{1}{\cosh^4(z)}.$$

(3 val.) (c) Mostre que

$$h = du \otimes du + \left(1 + u^2\right) dv \otimes dv.$$

(2 val.) (d) Prove que H é geodesicamente completa. Indique duas (imagens de) geodésicas distintas de H passando pelo ponto $(0,0,0)$.

(3 val.) (e) Mostre que C e H são **localmente isométricas**, i.e., mostre que existe um difeomorfismo local $\psi : H \to C$ tal que $h = \psi^* g$. Indique a curvatura de Gauss de H e a imagem por ψ das geodésicas que determinou na alínea anterior.

2. Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana de dimensão 2.

(3 val.) (a) Mostre que se $f : M \to M$ é uma isometria então

$$K(f(p)) = K(p)$$

para todo o $p \in M$, onde $K : M \to \mathbb{R}$ é a curvatura de Gauss de M. Conclua que se M é um grupo de Lie e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica invariante à esquerda então K é constante.

(3 val.) (b) Use o teorema de Gauss-Bonnet para provar que se M é um grupo de Lie compacto então M é difeomorfa ao toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.