Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria II

Repescagem do 1º Teste - 17 de Junho de 2004 - 10h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Uma **distribuição** Σ de planos-k em M é uma aplicação que a cada ponto $p \in M$ associa um subespaço $\Sigma_p \subset T_pM$ de dimensão k. A distribuição diz-se C^∞ se para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança $V \subset M$ de p e campos vectoriais $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(V)$ tais que $\Sigma_q = \text{span}\{(X_1)_q, \ldots, (X_k)_q\}$ para todo o $q \in V$. A distribuição diz-se **integrável** se para cada ponto $p \in M$ existe uma subvariedade $F \subset M$ de dimensão k tal que $p \in F$ e $\Sigma_q = T_qF$ para todo o $q \in F$.

(3 val.) **1.** Um campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ diz-se **compatível** com uma distribuição Σ se $X_p \in \Sigma_p$ para todo o $p \in M$. A distribuição Σ diz-se **involutiva** se $[X, Y]$ é compatível com Σ sempre que $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ são compatíveis com Σ. Mostre que se Σ é integrável então Σ é involutiva.

(3 val.) **2.** Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um subespaço. A **distribuição invariante à esquerda** gerada por $\mathfrak{h}$ é a distribuição Σ definida por $\Sigma_g = (dL_g)_e(\mathfrak{h})$. Mostre que Σ é involutiva **sse** $\mathfrak{h}$ é uma **subálgebra de Lie** de $\mathfrak{g}$, i.e., **sse** $[V, W] \in \mathfrak{h}$ para todo o $V, W \in \mathfrak{h}$.

(3 val.) **3.** Mostre que se $\omega \in \Omega^1(M)$ e $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ então

$$d\omega(X, Y) = X \cdot (\omega(Y)) - Y \cdot (\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

(3 val.) **4.** Prove que uma distribuição Σ de planos-k em M é C^∞ **sse** para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança $V \subset M$ de p e formas-1 $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k} \in \Omega^1(V)$ tais que $\Sigma_q = \ker(\omega^1)_q \cap \ldots \cap \ker(\omega^{n-k})_q$ para todo o $q \in V$.

(3 val.) **5.** Mostre que Σ é involutiva **sse** as formas-1 $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k}$ que definem Σ localmente satisfazem $d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-k} = 0$ para $i = 1, \ldots, n-k$.

(2 val.) **6.** Mostre que qualquer distribuição de planos-1 é integrável. Dê exemplos de distribuições de planos-2 em $\mathbb{R}^3$ integráveis e não integráveis.

(3 val.) **7.** Mostre que uma distribuição de planos-1 em S^2 induz uma aplicação diferenciável $f : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ tal que $f(p) \neq \pi(p)$, onde $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ é a projecção natural. Sabendo que f admite um **levantamento**, i.e., uma aplicação diferenciável $\tilde{f} : S^2 \to S^2$ tal que $f = \pi \circ \tilde{f}$, mostre que não existem distribuições de planos-1 em S^2. (**Sugestão:** Mostre que seria possível usar $\tilde{f}$ para construir um campo vectorial em S^2 sem zeros).