Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria II

2º Teste Para Praticar

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o hiperbolóide

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$$

munido da métrica g induzida pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$.

(3 val.) (a) Mostre que

$$g = \left(1 + z^2\right) d\theta \otimes d\theta + \frac{1 + 2z^2}{1 + z^2} dz \otimes dz,$$

onde (θ, z) são as coordenadas locais em M obtidas a partir das usuais coordenadas cilíndricas (r, θ, z) em $\mathbb{R}^3$.

(2 val.) (b) Prove que M é geodesicamente completa. Indique quatro (imagens de) geodésicas distintas de M passando pelo ponto $(1, 0, 0)$. (**Sugestão:** Determine a intersecção de M com o plano $x = 1$).

(3 val.) (c) Mostre que a curvatura de Gauss de M é

$$K = -\frac{1}{(1 + 2z^2)^2}.$$

2. Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana de dimensão n, $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal definido nalgum aberto $U \subset M$ e $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ o co-referencial dual. Definem-se as **funções de estrutura** C^i_{jk} do referencial através de

$$[E_j, E_k] = \sum_{i=1}^n C^i_{jk} E_i,$$

e, como habitualmente, os **símbolos de Christoffel** mediante

$$\nabla_{E_j} E_k = \sum_{i=1}^n \Gamma^i_{jk} E_i$$

(onde ∇ é a conexão de Levi-Civita).

(3 val.) (a) Mostre que

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}(C^i_{jk} + C^k_{ij} + C^j_{ik}).$$

Use este facto para provar que se verificam as **equações de Maurer-Cartan**

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k.$$

(3 val.) (b) Suponha deste ponto em diante que M é um grupo de Lie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica invariante à esquerda e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal de campos invariantes à esquerda. Mostre que as funções de estrutura são constantes (ditas as *constantes de estrutura*). Conclua que a curvatura escalar de qualquer métrica invariante à esquerda num grupo de Lie é constante.

(3 val.) (c) Recorde que a álgebra de Lie de $SO(3)$ é

$$\mathfrak{so}(3) = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A^t = -A\},$$

e que o comutador de matrizes em $\mathfrak{so}(3)$ fornece o parêntesis de Lie dos correspondentes campos invariantes à esquerda. Fazendo

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

calcule as constantes de estrutura e os símbolos de Christoffel.

(3 val.) (d) Mostre que para cada $A \in \mathfrak{so}(3)$ a curva e^{At} é uma geodésica da métrica invariante à esquerda definida na alínea anterior. Conclua que todas as geodésicas de $SO(3)$ com esta métrica são curvas fechadas.