Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria II

1º Teste Para Praticar

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

O estudo do movimento de um corpo rígido com momentos de inércia $a > b > c > 0$ conduz às chamadas **equações de Euler**:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) yz \\ \\ \dot{y} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) zx \\ \\ \dot{z} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) xy \end{cases}$$

Este sistema de equações diferenciais define o fluxo de um campo vectorial $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$.

(3 val.) **1.** Mostre que X é tangente a cada uma das subvariedades de $\mathbb{R}^3$

$$E_k = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = k\right\} \qquad (k > 0)$$

e

$$S_l = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = l^2\right\} \qquad (l > 0);$$

Use este facto para provar que X é completo.

(2 val.) **2.** Mostre que o fluxo do campo $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$, definido por

$$Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

leva imagens de curvas integrais de X em imagens de curvas integrais de X.

(3 val.) **3.** Mostre que $[X, Y] = -X$, e use este facto para provar que os **fluxos** dos campos X e Y não comutam.

(3 val.) **4.** Mostre que a acção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definida pelo fluxo de Y é livre e própria, e identifique a variedade quociente.

(3 val.) **5.** Seja V um espaço vectorial de dimensão finita. A **contracção** de um tensor alternante $T \in \Lambda^k(V^*)$ com um vector $v \in V$ é o tensor alternante $\iota(v)T \in \Lambda^{k-1}(V^*)$ definido por

$$\iota(v)T(v_1, \ldots, v_{k-1}) = T(v, v_1, \ldots, v_{k-1})$$

para quaisquer $v_1, \ldots, v_{k-1} \in V$. Mostre que se $T \in \Lambda^k(V^*)$ e $S \in \Lambda^m(V^*)$ então

$$\iota(v)(T \wedge S) = (\iota(v)T) \wedge S + (-1)^k T \wedge (\iota(v)S).$$

(3 val.) **6.** Use a alínea anterior para mostrar que

$$d(\iota(X)\omega) = -\frac{4}{3}\, \iota(X)d\omega,$$

onde

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

(3 val.) **7.** A **derivada de Lie** da forma diferencial ω segundo o campo vectorial X define-se como sendo a forma diferencial

$$\pounds_X \omega = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\psi_t^* \omega),$$

onde ψ_t é o fluxo de X. É possível mostrar que

$$\pounds_X \omega = d(\iota(X)\omega) + \iota(X)d\omega$$

(**fórmula mágica de Cartan**). Mostre que o fluxo de X em cada uma das subvariedades S_l preserva o volume definido pela forma ω, i.e., que

$$\int_A \omega = \int_{\psi_t(A)} \omega$$

para qualquer subconjunto mensurável $A \subset S_l$ e $t \in \mathbb{R}$.